CM 005 Álgebra Linear: Prova Substitutiva

06 de Dezembro de 2016

Nome: ____

Responda: Qual prova vai ser substituída? ◯ P1 ◯ P2 ◯ P3

Questões relativas à Prova 1

Questão 1 .... $\boxed{0}$

Ache os possíveis valores para a e b para que o sistema de equações cuja matriz aumentada

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a & 0 & | & 1 \\ 2 & 2 & a & b & | & 1 \\ 1 & 1 & a & 0 & | & 1 \\ 1 & 1 & a & b & | & 1 \end{pmatrix}$$

satisfaça uma das seguintes condições:

(a) $\boxed{10}$ o sistema tem uma única solução;

(b) $\boxed{10}$ o sistema tem infinitas soluções;

(c) $\boxed{10}$ o sistema não tem solução.

Dica: Analise cada caso possível dependendo dos valores de a e b.

Questão 2 .... $\boxed{0}$

(a) $\boxed{20}$ Utilize o método de Gauss-Jordan para calcular a inversa de A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) $\boxed{10}$ Ache $\bar{x} \in \mathbb{R}^3$ tal que $A\bar{x} = \bar{b}$ onde $\bar{b} = (2, 0, 2)^T$ e A é a matriz do item anterior.

Questão 3 .... $\boxed{0}$

[20] Mostre que $W = \{f \in C[-1,1] : f(0) = \int_{-1}^{1} f(x)dx\}$ é um subespaço vetorial de $C[-1,1]$.

Questão 4 .... $\boxed{0}$

[10] Considere os subespaço vetoriais $W_1 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0, x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ e $W_2 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0\}$. Calcule $W_1 \cap W_2$.

Questão 5 .... $\boxed{0}$

[10] Se $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Mostre que $I - AB$ é invertível se $I - BA$ é invertível.

Questões relativas à Prova 2

Questão 1 .... $\boxed{0}$

Para cada $a \in \mathbb{R}$, considere a matriz

$$A_a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & a \end{pmatrix}$$

(a) $\boxed{10}$ Qual é o posto da matriz A_a?;

(b) $\boxed{10}$ Qual é a dimensão de $Nuc(A_a)$?

(c) $\boxed{10}$ Encontre uma base para o espaço coluna $col(A_a)$ e o espaço linha $lin(A_a)$

Questão 2 .... $\boxed{0}$

[10] Denote por $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ o conjunto de todas as matrizes de ordem $m \times n$. Considere duas matrizes $A \in M_{m\times m}(\mathbb{K})$ e $B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. Verifique que a função $T : M_{m\times n}(\mathbb{K}) \to M_{m\times n}(\mathbb{K})$, definido como

$$T(X) = AX + XB \text{ para todo } X \in M_{m\times n}(\mathbb{K}) \text{ é uma transformação linear.}$$

Questão 3 .... $\boxed{0}$

[10] Verifique que os polinômios $p_1(x) = x^2 - x$, $p_2 = x^3 - x^2$ e $p_3 = 2x^3 + x$ são l.i.

Questão 4 .... $\boxed{0}$

Seja $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear tal que

$$T(\bar{v}_1) = (1,0,0)^T, \ \ T(\bar{v}_2) = (1,1,0)^T \ \text{ e } \ T(\bar{v}_3) = (1,-1,1)^T,$$

onde $\bar{v}_1 = (1,1,1,0)^T$, $\bar{v}_2 = (0,-1,1,0)^T$ e $\bar{v}_3 = (2,0,-2,0)^T$. Com essa informação:

(a) $\boxed{10}$ Calcule $T(\bar{v})$ onde $\bar{v} = (4,0,6,0)^T$.

(b) $\boxed{10}$ Por quê não é possível, com essas informações, conhecer o valor de $T(\bar{w})$ se $\bar{w} = (0,0,0,1)^T$?

Questão 5 .... $\boxed{0}$

Seja $\mathcal{P}_2$ o conjunto de todos os polinômios de grau menor ou igual a 2. Considere a transformação linear $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ tal que para cada polinômio $p(x) \in \mathcal{P}_2$, $T(p)$ é um novo polinômio definido como

$$T(p)(x) = (3x+2)p'(x) + p(x)$$

(a) $\boxed{10}$ Calcule a matriz associada a T em relação à base $\mathcal{B} = \{1, x^2, x\}$.

(b) $\boxed{10}$ Mostre que T é uma transformação linear injetora, provando que $Ker(T) = \{\bar{0}\}$.

(c) $\boxed{10}$ Qual é a dimensão de $Im(T)$? *Dica:* Lembre que $dim(\mathcal{P}_2) = 3$.

Questões relativas à Prova 3

Questão 1 .... $\boxed{0}$

Em $\mathbb{R}^4$, considere o subespaço vetorial

$$X = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{rrrrcl} x_1 & -x_2 & -x_3 & +x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & -x_2 & -x_3 & +2x_4 & = & 0 \end{array} \right\}.$$

(a) $\boxed{10}$ Encontre uma base para X;

(b) $\boxed{10}$ Ache uma base para $X^{\perp}$;

(c) $\boxed{10}$ Encontre $\text{proj}_X(\bar{y})$) e $\text{proj}_{X^{\perp}}(\bar{y})$, onde $\bar{y} = (0,0,0,1)^T$.

Questão 2 .... $\boxed{0}$

Considere o sistema de equações: $x_1 + x_2 = 3$, $\ 2x_1 - 3x_2 = -1\ $ e $-2x_1 + x_2 = -2$.

(a) $\boxed{10}$ Mostre que o sistema não tem solução

(b) $\boxed{10}$ Ache a melhor aproximação da solução usando mínimos quadráticos

Questão 3 .... $\boxed{0}$

Dados a e $b \in \mathbb{R}$, considere a matriz quadrada

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 2 \end{pmatrix}$$

(a) $\boxed{10}$ Determine todos os valores de a e b, para que a matriz A seja diagonalizável.

(b) $\boxed{20}$ Para os casos em que A é diagonalizável, calcule uma matriz D diagonal e uma matrix S invertível tal que $S^{-1}AS = D$. (*Não é necessário verificar* $S^{-1}AS = D$)

Questão 4 .... $\boxed{0}$

[10] Dada a base $\{(1, 2, -2)^T, (4, 3, 2)^T, (1, 2, 1)^T\}$ em $\mathbb{R}^3$. Use o processo de Gram-Schmidt para encontrar uma base ortonormal.

Questão 5 .... $\boxed{0}$

[10] Seja $\{u_1, u_2, u_3\}$ um conjunto *ortonormal* de um espação V. Suponha que $v = \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3$ é tal que $\|v\| = 3$, $\langle u_3, v\rangle = 2$ e $v \perp (u_1 + u_2)$. Então, quais são os possíveis valores de α, β e γ?