Geometria Analítica : Prova 3

22 de junho de 2017

Orientações gerais
1) As soluções devem conter o desenvolvimento e ou justificativa. Questões sem justificativa ou sem raciocínio lógico coerente não pontuam.
2) A interpretação das questões é parte importante do processo de avaliação. Organização e capricho também serão avaliados.
3) Não é permitido a consulta nem a comunicação entre alunos.

Questão 1 .... $\boxed{35}$

Encontre as coordenadas dos vértices e dos focos das seguintes equações:

(a) (10 points) $4x^2 + 169y^2 = 676$. Esboce

Solution: Multiplicando adequadamente, temos a seguinte equação $x^2/13^2 + y^2/2^2 = 1$. Isto é uma elipse com centro na origem cujo eixo focal é o eixo x. Segue da equação que $a = 13$, $b = 2$ e $c = \sqrt{165}$. Temos que os vértices são $V = (0,0) \pm a(1,0) = (\pm 13, 0)$ e os focos são $F = (0,0) \pm c(1,0) = (\pm\sqrt{165}, 0)$.

(b) (10 points) $x^2 + 2x - 4y + 9 = 0$. Esboce

Solution: Dita equação foi analisada em aula. Completando quadrados temos a seguinte equação $(x+1)^2 = 4(y-2)$. Isto é uma parábola com vértice em $(-1,2)$ e cujo eixo focal é o eixo y. Segue da equação que $p = 1$. Assim, o foco é os focos são $F = (-1,2) + p(0,1) = (-1,3)$.

(c) (15 points) $x^2 - 2y^2 - 4x - 4y - 1 = 0$. Esboce.

Solution: Completando quadrados temos a seguinte equação $(x-2)^2/3 - 2(y+1)^2/3 = 1$. Isto é uma hipérbole com centro $(2,-1)$ e cujo eixo focal é o eixo x. Segue da equação que $a = \sqrt{3}$, $b = \sqrt{3/2}$ e $c = 3\sqrt{2}/2$. Temos que os vértices são $V = (2,-1) \pm a(1,0) = (2 \pm \sqrt{3}, -1)$ e os focos são $F = (2,-1) \pm c(1,0) = (2 \pm 3\sqrt{2}/2, -1)$.

Questão 2 .... $\boxed{15}$

Seja $\mathcal{P}$ uma parábola com reta diretriz $\mathcal{D} : x - 2 = 0$. Se o vértice está sobre a reta $r_1 : 3x - 2y = 19$ e o foco está sobre a reta $r_2 : x + 4y = 0$, encontre a equação da parábola.

Solution: Feito em aula. Resposta: $(y+2)^2 = 12(x-5)$.

Questão 3 .... $\boxed{15}$

Ache a equação reduzida da hipérbole cuja distância focal é $2\sqrt{5}$, os focos pertencem ao eixo x e uma das assíntotas é a reta $r : x + 3y = 0$.

Solution: Dos dados do problema, $c = \sqrt{5}$. Como $r : x + 3y = 0$ é uma assíntota que intercepta o eixo x (eixo focal) na origem, temos que o centro da hipérbole é a origem , assim a equação da hiperbole é da forma $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$.

Procedemos a encontrar a e b. Como r é uma assintota (fazendo um desenho por exemplo) temos que $b/a = 1/3$. *Cuidado:* $b/a = -1/3$ *está errado. a, b são SEMPRE positivos, são distâncias.*

De $a = 3b$, $c = \sqrt{5}$ e de $c^2 = a^2 + b^2$. Temos que $a^2 = 9/2$ e $b^2 = 1/2$. Assim, a equação da hipérbole é $2x^2/9 - 2y^2 = 1$. *Exercício similar foi resolvido na aula.*

Questão 4 .... [20]

Considere uma hipérbole $\mathcal{H}$ com excentricidade é $e = 2$ e cujos vértices são $(2, 5)$ e $(0, -1)$.

(a) (10 points) Encontre os focos da hipérbole;

Solution: Claramente, $e = 2$, $a = \sqrt{10}$ e $c = 2\sqrt{10}$. Além disso, o centro é $(1, 2)$ (ponto meio do segmento que ume os vértices). Observe que como os focos ESTÂO sobre a mesma reta que contem os vértices podemos usar um vetor diretor dessa reta para calular os focos. *Use vetores tal como vc aprendeu na primeira parte da disciplina, né?.*
Um vetor diretor da reta é $(1, 3)/\sqrt{10}$. Portanto, os focos são

$$F = (1, 2) \pm c(1, 3)/\sqrt{10} = (1, 2) \pm 2\sqrt{10}(1, 3)/\sqrt{10}$$

Calculando, os focos são $(3, 8)$ e $(-1, -4)$.

(b) (10 points) Ache as equações das retas diretrizes associada à hipérbole

Solution: A reta diretriz é uma reta perpendicular ao eixo focal cuja distância ao centro é a/e. Assim, como conhecemos o eixo focal, conhecemos também um vetor diretor de dita reta. Para calcular o ponto onde a reta deve passar, de novo, vamos *usar vetores tal como vc aprendeu na primeira parte da disciplina.*
Um vetor diretor da reta diretriz é $(-3, 1)$. Portanto, os pontos P por onde passam as diretrizes são

$$P = (1, 2) \pm (a/e)(1, 3)/\sqrt{10} = (1, 2) \pm (\sqrt{10}/2)(1, 3)/\sqrt{10} = (1, 2) \pm (1/2, 3/2).$$

Calculando, os pontos são $(3/2, 7/2)$ e $(1/2, 1/2)$. Logo, as retas diretrizes são $r_1; (3/2, 7/2) + t(-3, 1), t \in \mathbb{R}$ (cuja equação em forma geral é $r_1 : x+3y-12 = 0$) e $r_2; (1/2, 1/2)+t(-3, 1), t \in \mathbb{R}$ (cuja equação em forma geral é $r_2 : x+3y-2 = 0$). Você tambem poderia achar direitamente as retas na forma geral, ambas respostas são certas.

Questão 5 .... [20]

Seja $\mathcal{E}$ uma elipse com focos em $F_1 = (2, 2)$ e $F_2 = (8, 2)$. A equação de uma reta tangente à elipse é $r : x + 2y - 21 = 0$. Encontre o perímetro do triângulo cujos vértices são os focos da elipse e o correspondente ponto de tangência.

Solution: Usando a definição de elipse é fácil ver que o perimetro do triângulo é $2a + 2c$. Assim, nosso objetivo é calcular a e c. Já que conhecemos os focos temos que $c = 3$. Além disso, dos focos temos que o centro é $C = (5, 2)$ e o eixo focal é paralelo ao eixo x.

Com essas informações temos que a equação da elipse deve ser da forma $(x-5)^2/a^2+(y-2)^2/b^2 = 1$. Fazendo $x' = x - 5$, $y' = y - 2$. A equação se reduz a $(x')^2/a^2 + (y')^2/b^2 = 1$. *Já que a equação está na forma reduzida podemos usar a formula da reta tangente.* Seja (x'_0, y'_0) ponto de tangencia, assim da formula temos que

$$r : (b^2x'_0)x' + (a^2y'_0)y' - a^2b^2 = 0 \tag{1}$$

Por outro lado sabemos que a reta tangente é $x+2y-21=0$, mas *NÃO podemos comparar ambas tangentes porque estão em coordenadas diferentes.* Re-escreva $x+2y-21=0$ usando coordendas x' e y'. Portanto $x+2y-21=(5+x')+2(2+y')-21=x'+2y'-12$. Assim, obtemos que

$$r : x'+2y'-12=0 \tag{2}$$

Como as retas (1) e (2) representam a mesma reta, elas devem ser multiplos. Assim, existe um número $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$b^2x_0' = k, \quad a^2y_0' = 2k \quad \text{e} \quad a^2b^2 = 12k$$

Assim, $x_0' = a^2/12$ e $y_0' = b^2/6$. Como (x_0', y_0') está sobre a elipse, ele satisfaz $(x')^2/a^2+(y')^2/b^2=1$. Substituindo, obtemos que $a^2+4b^2=4.36$. Agora, usando o fato que $c=3$ e $a^2=c^2+b^2=9+b^2$ temos que

$$a^2+4b^2=4.36 \Rightarrow a^2+4(a^2-9)=4.36 \Rightarrow 5a^2=5.36 \Rightarrow a^2=36 \Rightarrow a=6.$$

Para terminar observe que o perimetro do triângulo é $2a+2c=2(6)+2(3)=12+6=18$.

Formulas: *Retas tangentes*
Quando $y^2=4px$. A reta tangente à $\mathcal{P}$ no ponto $P=(x_0,y_0)\in\mathcal{P}$ é dada por $r: y_0y=2p(x_0+x)$.
Quando $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$.
A reta tangente da $\mathcal{E}$ no ponto $P=(x_0,y_0)\in\mathcal{E}$ é dada por $r:(b^2x_0)x+(a^2y_0)y=a^2b^2$.
Quando $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$.
A reta tangente da $\mathcal{H}$ no ponto $P=(x_0,y_0)\in\mathcal{H}$ é dada por $r:(b^2x_0)x-(a^2y_0)y=a^2b^2$.