Geometria Analítica : Prova 2

18 de maio de 2017

Orientações gerais

1) As soluções devem conter o desenvolvimento e ou justificativa.
   Questões sem justificativa ou sem raciocínio lógico coerente não pontuam.
2) A interpretação das questões é parte importante do processo de avaliação.
   Organização e capricho também serão avaliados.
3) Não é permitido a consulta nem a comunicação entre alunos.

Questão 1 .... $\boxed{20}$

Ache o ângulo entre o plano $\pi_1 : 2x - y + z = 0$ e o plano π_2 que contem uma reta com vetor diretor $U = (1, 1, 1)$ e é perpendicular ao vetor $\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k}$.

Solution: Como $N_2 := \hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k}$ é normal ao plano π_2 temos

$$\cos(\pi_1, \pi_2) = \frac{|N_2.(2, -1, 1)|}{\|N_2\|\|(2, -1, 1)\|} = \frac{|(1, -2, 1).(2, -1, 1)|}{\|(1, -2, 1)\|\|(2, -1, 1)\|} = \frac{5}{6}.$$

Questão 2 .... $\boxed{20}$

Encontre a equação geral do plano π que contém a reta $r : (0, 0, 1) + (t, -t, -t), t \in \mathbb{R}$, equidista de $P = (1, 0, 0)$ e $Q = (0, 1, 0)$, e separa P e Q.

Solution: Queremos achar um plano $\pi : ax + by + cz + d = 0$ que satisfaz as condições requeridas. Claramente, $N = (a, b, c)$ é um vetor normal a π.

1. De $r \in \pi$, temos que :
   (a) $(0, 0, 1) \in r \subset \pi$ e assim $c + d = 0$
   (b) Como $(1, -1, 1)//\pi$ temos que $(1, -1, 1) \perp N$ e assim $a - b + c = 0$
2. Sabe-se que
   $$dist(P, \pi) = \frac{|a + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \text{ e } dist(Q, \pi) = \frac{|b + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$
   Já que $dist(Q, \pi) = dist(P, \pi)$. Temos que $|a+d| = |b+d|$ qual implica que $(a+d)^2-(b+d)^2 = 0$. Logo, $(a - b)(a + b + 2d) = 0$.

Dos item anteriores tem-se que $a - b = 0$ ou $a + b + 2d = 0$.

1. Caso $a - b = 0$. Neste, caso usando (b) temos que $c = 0$ e de (a) que $d = 0$. Assim $\pi : ax + ay + 0z + 0 = 0$, com $a \neq 0$, ou equivalentemente $\pi : x + y = 0$. Mas esse plano não separa P e Q porque $x + y$ tem o mesmo sinal quando é avaliado em P e em Q.
2. Caso $a + b + 2d = 0$. De (a) $d = -c$, substuindo e usando (b) tem-se $c = \frac{2}{3}a$, $b = a - c = \frac{1}{3}a$ e $d = -c = -\frac{2}{3}a$. Logo, $\pi : ax + \frac{1}{3}ay + \frac{2}{3}az - \frac{2}{3}a = 0$, com $a \neq 0$, ou equivalentemente $\pi : 3x+y+2z-2 = 0$. Note que $3(1)+(0)+2(0)-2 = 1 > 0$ e $3(0)+(1)+2(0)-2 = -1 < 0$. Assim, P e Q são separado por $\pi : 3x + y + 2z - 2 = 0$.

Solution: *Outra forma.* Como P e Q são equidistantes temos que $R := (P+Q)/2$ pertence a π. Calculando temos que $R = (1/2, 1/2, 0)$. Já que $A = (0,0,1) \in \pi$, o vetor $\overrightarrow{AR} := (1/2, 1/2, -1)$ é paralelo a π. Assim $\overrightarrow{AR} \times (1,-1,-1) = (3/2, 1/2, 1) \mathbin{//} (3,1,2)$ é um normal ao plano π. Então, $\pi := 3x + y + 2z + d = 0$. Para calcular d, usamos que $(0,0,1) \in \pi$, o que implica que $d = -2$. Portanto, o plano é $\pi := 3x + y + 2z - 2 = 0$

Questão 3 .... $\boxed{20}$

Seja $\mathcal{C}$ uma circunferência de centro $C = (-2, 3)$ e raio $\sqrt{5}$. Encontre a equação da reta tangente à circunferência que passa por $P = (3, 3)$.

Solution: Seja $T = (x, y)$ ponto de tangência.

1. Como T é ponto de tangência. $\overrightarrow{TC} \perp \overrightarrow{TP}$ e assim $(-2-x, 3-y).(3-x, 3-y) = 0$. Portanto, $(x+2)(x-3) + (3-y)^2 = 0$.
2. Já que T está na circunferência, tem-se $\|(-2-x, 3-y)\| = \sqrt{5}$. Assim, $(2+x)^2 + (3-y)^2 = 5$.

Restando (2)-(1), $(x+2)^2 - (x+2)(x-3) = 0$. Assim, $(x+2)(x+2-(x-3)) = 5$ e daí, $x = -1$. De (2) temos que $1 + (3-y)^2 = 5$, então $y = 1$ ou $y = 5$.

Assim, os pontos de tangencia são $T_1 := (-1, 1)$ e $T_2 := (-1, 5)$. As retas desejadas (em forma vetorial) são $r_1 := (3,3) + t\overrightarrow{T_1P} = (3,3) + t(4,2)$ e $r_2 := (3,3) + t\overrightarrow{T_2P} = (3,3) + t(4,-2)$. A equação geral seria $r_1 := -2x + 4y - 6 = 0$ e $r_2 := 2x + 4y - 18 = 0$.

Questão 4 .... $\boxed{15}$

Considere o ponto $P = (1, 0, 1)$ e o plano $\pi : x - 2y + 4z = 1$.

(a) (10 points) Determine as coordenadas da projeção ortogonal do P e plano π

Solution: Calculemos a $dist(P, \pi) = \dfrac{|1+4-1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 4^2}} = \dfrac{4}{\sqrt{21}}$. Como P está acima do plano π (considerando a direção da normal $N = (1, -2, 4)$), temos que se Q é a projeção ortogonal de P sobre π, então

$$\overrightarrow{QP} = dist(P, \pi)\frac{N}{\|N\|},$$

calculando temos que

$$Q = P - \frac{4}{\sqrt{21}}\frac{N}{\|N\|} = (1,0,1) - \frac{4}{\sqrt{21}}\frac{(1,-2,4)}{\sqrt{21}} = (1,0,1) - \frac{4}{21}(1,-2,4) = (\frac{17}{21}, \frac{8}{21}, \frac{5}{21}).$$

(b) (5 points) Encontre as coordenadas do *ponto simétrico* a P em relação ao plano π

Solution: O ponto simétrico $\widehat{P}$ satisfaz a relação

$$\overrightarrow{\widehat{P}P} = 2dist(P, \pi)\frac{N}{\|N\|}.$$

Assim, podemos calcular $\widehat{P}$ como

$$\widehat{P} = P - 2\frac{4}{\sqrt{21}}\frac{N}{\|N\|} = (\frac{13}{21}, \frac{16}{21}, -\frac{11}{21}).$$

Questão 5 .... $\boxed{15}$

Considere duas retas $r : (1,0,2) + (2t, t, 3t), t \in \mathbb{R}$ e $s : (0,1,-1) + (t, \alpha t, 2\alpha t), t \in \mathbb{R}$.

(a) (10 points) Determine o valor de α para que as retas sejam coplanares.

> **Solution:** Como elas são retas reversas (não são paralelas), para que elas sejam coplanares a distância entre elas deve ser zero. Assim,
>
> $$dist(r,s) = \frac{|\overrightarrow{P_sP_r}.V_s \times V_r|}{\|V_s \times V_r\|} = 0,$$
>
> onde $P_s = (0,1,-1)$, $P_r = (1,0,2)$, $V_s = (1,\alpha,2\alpha)$ e $V_r = (2,1,3)$.
> Calculando o produto misto (usando determinantes) temos que $\overrightarrow{P_sP_r}.V_s \times V_r = 0$ implica que $\alpha = 2/3$.

(b) (3 points) Para o valor de α encontrado, determine a posição relativa entre s e r

> **Solution:** Como $V_s = (2,1,3)$ e $V_r = (1, 2/3, 4/3)$ não são paralelas elas são concorrentes

(c) (2 points) Determine a equação do plano determinado por r e s

> **Solution:** O plano π dever ser $P_0 + tV_s + sV_r$, com $t,s \in \mathbb{R}$. Devemos achar o ponto P_0. Como as retas já são coplanares (para esse valor de α) podemos pegar $P_0 = (0,1,-1)$ (ou $P_0 = (1,0,2)$).

Questão 6 .... $\boxed{10}$

Considere um tetraedro com vértices $O = (0,0,0)$, $A = (1,0,0)$, $B = (0,2,0)$ e $C = (0,0,3)$. Encontre a equação geral do plano que dista $2/7$ da face ABC e intercepta o tetraedro.

> **Solution:** Primeiro calculemos o plano π_{ABC} que contem a face ABC. Um vetor normal a π_{ABC} é $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (6,3,2)$. Assim, como plano π_{ABC} é $6x + 3y + 2z + d = 0$ para algum d. Já que $A = (1,0,0) \in \pi_{ABC}$, temos que $d = -6$.
>
> Se temos um plano π que dista $2/7$ de π_{ABC}, o plano π deve ser $\pi := 6x + 3y + 2z + \widehat{d} = 0$, para algum $\widehat{d}$. Calculemos $\widehat{d}$. Já que
>
> $$dist(\pi, \pi_{ABC}) = \frac{|\widehat{d} - (-6)|}{\sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2}} = \frac{|\widehat{d} + 6|}{\sqrt{49}} = \frac{|\widehat{d} + 6|}{7} = \frac{2}{7}.$$
>
> Da expressão anterior temos que $\widehat{d} = -4$ ou $\widehat{d} = -8$. Assim, existe dois planos $6x + 3y + 2z = 4$ e $6x + 3y + 2z = 8$. Já que o plano que contem a face ABC é $6x + 3y + 2z = 6$, só o plano $6x + 3y + 2z = 4$ intercepta o tetraedro. Assim, a resposta é $6x + 3y + 2z = 4$.