Analise II: Prova 1

06 de abril de 2017

Orientações gerais
1) As soluções devem conter o desenvolvimento e ou justificativa. Questões sem justificativa ou sem raciocínio lógico coerente não pontuam.
2) A interpretação das questões é parte importante do processo de avaliação. Organização e capricho também serão avaliados.
3) Não é permitido a consulta nem a comunicação entre alunos.

Questão 1 .... $\boxed{5}$

Enuncie e prove o Teorema Fundamental do Cálculo.

Questão 2 .... $\boxed{5}$

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada e integrável.

(a) Mostre que $\mathcal{A} := \{x \in [a, b] : \ f \text{ é contínua em } x\}$ é denso em $[a, b]$.

Solution: Seja $\mathcal{D} := [a, b] \setminus \mathcal{A}$. Da caracterização da integrabilidade, $m(\mathcal{D}) = 0$. Note que $\mathcal{D}$ é o conjunto dos pontos de descontinuidade de f.

Suponha por contradição que $\mathcal{A}$ não é denso. Assim, existe $c \in [a, b]$ e um intervalo fechado I com $int(I) \neq \emptyset$ tal que $c \in I$ e $I \cap \mathcal{A} = \emptyset$. Portanto, $I \subset \mathcal{A}^c = \mathcal{D}$. Como $m(\mathcal{D}) = 0$, temos que $m(I) = 0$, o que é uma contradição.

Questão 3 .... $\boxed{10}$

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada e integrável.

(a) (5 points) Mostre que $H(x) := \displaystyle\int_a^x f(t)dt - \int_x^b f(t)dt$, $x \in [a, b]$ é contínua.

Solution: Para provar que $H(x)$ é contínua, será suficiente provar que $H_1(x) := \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ e $H_2(x) := \displaystyle\int_x^b f(t)dt$ são funções contínuas. De fato, se $M > 0$ é tal que $|f(x)| \leq M, x \in [a, b]$. Então para $x < y$ temos que

$$|H_1(y) - H_1(x)| = |\int_x^y f(s)ds| \leq \int_x^y |f(s)|ds \leq M \int_x^y ds \leq M|x - y|.$$

Similarmente, $|H_1(y) - H_1(x)| = |\displaystyle\int_x^y f(s)ds| \leq M \int_y^x ds \leq M|x - y|$ para $x > y$. Assim, $H_1(x)$ é uma função Lipschitziana e portanto contínua. A continuidade de $H_2(x)$ segue os mesmos passo que $H_1(x)$.

(b) (5 points) Prove que se $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \neq 0$, então existe um $c \in (a, b)$ tal que $\displaystyle\int_a^c f(t)dt = \int_c^b f(t)dt$.

Solution: Do item anterior, $H(x)$ é contínua em $[a, b]$. Note que $H(a) = -\displaystyle\int_a^b f(s)ds = -H(b)$ e como $H(b) \neq 0$ temos que $H(a) > 0 > H(b)$ ou $H(b) > 0 > H(a)$. Do teorema do valor intermédiario, existe $c \in (a, b)$ tal que $H(c) = 0$. Isto é $\displaystyle\int_a^c f(t)dt = \int_c^b f(t)dt$.

Questão 4 20

Seja $g \geq 0$ integrável. Se $\int_a^b g(x)dx = 0$, então $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$, $\forall f$ limitada e integrável.

Solution: Seja f limitada e integrável. Logo, existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para $x \in [a,b]$. Usando as propriedades da integral,

$$|\int_a^b f(x)g(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx = 0,$$

onde a primeira desigualdade temos usado que $g(x) \geq 0$.

Questão 5 20

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função Lipschitziana com constante de Lipschitz $K > 0$, isto é,

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|, \text{ para todo } x, y \in \mathbb{R}.$$

(a) (10 points) Prove que se X tem medida nula, então $f(X)$ tem medida nula.

Solution: Seja $\varepsilon > 0$. Já que $m(X) = 0$, da definição de medida nula, temos que existem intervalos $I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots$ tais que $X \subset \cup_{i=1}^{\infty} I_i$ e $\sum_{i=1}^{\infty} |I_i| < \varepsilon/K$. Considere $J_i = f(I_i)$, para $i \in \mathbb{N}$. Certamente $f(X) \subset \cup_{i=1}^{\infty} f(I_i)$ e $\sum_{i=1}^{\infty} |f(I_i)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} K|I_i| < \varepsilon$. Como f é Lipschitz, f é contínua e da continuidade $f(I_i)$ é também um intervalo. Portanto, a sequência de intervalos $\{J_i = f(I_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ satisfaz as propriedades suficientes para dizer que $f(X)$ tem medida nula.

(b) (10 points) Prove ou forneça um contraexemplo, da afirmação: "$f \circ g$ é integrável se g é integrável e f é Lipschitziana".

Solution: A afirmação é verdadeira. Como f é Lipschitziana, ela é contínua. Usando continuidade, vemos que $D_{f\circ g} \subset D_g$, onde D_g é o conjunto de descontinuidade de g e $D_{f\circ g}$ é o conjunto de descontinuidade de $f \circ g$. Já que $m(D_g) = 0$ temos que $m(D_{f\circ g}) = 0$, o que implica que $f \circ g$ é integrável.

Questão 6 20

Prove a convergência de

(a) (8 points) $\int_0^{\infty} \frac{1}{1 + e^x} dx$

Solution: Usar o teste de comparação. Observe que $\frac{1}{1 + e^x} \leq \frac{1}{e^x}$.

(b) (8 points) $\int_0^1 \frac{1}{x^s} dx$, para $s < 1$.

Solution: Usando mudança de variável, temos que $\int_0^1 \frac{1}{x^s} dx = \int_0^{\infty} e^{-v(1-s)} dv$. Já que $1 - s > 0$, a última integral imprópria converge.

(c) (4 points) $\displaystyle\int_0^\infty \cos(x^2)dx$

Solution: Escreva $\displaystyle\int_0^\infty \cos(x^2)dx = \int_0^1 \cos(x^2)dx + \int_1^\infty \cos(x^2)dx$. Para analisar a convergência da integral, analisaremos $\displaystyle\int_1^\infty \cos(x^2)dx$. Usando mudança de variável,

$$\int_1^\infty \cos(x^2)dx = \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{\cos(u)}{\sqrt{u}}du.$$

A última integral imprópria converge, devido ao critério de Dirichlet.