Lista 4: Otimização II

A. Ramos *

November 14, 2017

Abstract

Lista em constante atualização.

1. Lagrangiano aumentado, dualidade e SQP
2. Para os exercícios que forem convenientes pode ser usado alguma linguagem de programação.

1. Prove que a função dual é concava e o domínio dela é convexo.

2. Seja B uma matriz simétrica definida positiva. Encontre o problema dual do problema de minimização:

$$\text{minimizar} \quad \frac{1}{2}x^T Bx \quad \text{sujeito a} \quad Ax = b, x \geq 0.$$

3. Seja um vetor $b \neq 0$ e um escalar $\alpha > 0$. Seja B uma matriz simétrica não singular e definida positiva sobre o subespaço $\{x \in \mathbb{R}^n : b^T x = 0\}$. Considere o problema de minimização quadrática:

$$\text{minimizar} \quad \frac{1}{2}x^T Bx + \alpha b^T x \quad \text{sujeito a} \quad b^T x = 0.$$

   (a) Encontre a solução ótima desse problema. Essa solução é um ponto KKT? Em caso afirmativo, encontre o multiplicador de Lagrange associado.

   (b) Escreve a função Lagrangeano aumentado associado ao problema com penalidade quadrática.

   (c) Mostre que as sequências gerada pelo método de Lagrangeano aumentado com penalidade quadrática satisfaz

$$x^{k+1} = \frac{(\lambda^k - \alpha)B^{-1}b}{1 + \rho_k bTB^{-1}b} \quad \text{e} \quad \lambda^{k+1} = \lambda^k - \frac{\rho_k(\lambda^k - \alpha)B^{-1}b}{1 + \rho_k bTB^{-1}b}.$$

4. Verifique no caso de programação linear que o dual do problema dual é o problema original.

5. Seja (P) o problema de programação linear e (D) o problema dual associado. Mostre que (i) se (P) é ilimitado inferiormente, então (D) é inviável; (ii) se (P) é viável e limitada inferiormente, então (D) tem uma solução ótima e o gap de dualidade é zero; (iii) se (P) é inviável dê exemplos onde (D) é ilimitado ou inviável.

6. Considere o problema de minimização: minimizar $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}(y-3)^2$ sujeito a $x^2 - y \leq 0$, $-x + y \leq 2$.

   (a) O problema anterior é um problema de otimização convexa?

   (b) Solucione o problema geometricamente

   (c) Dê um motivo teórico que justifique a existência de pontos KKT. Dê também um motivo para a unicidade de ponto KKT.

   (d) Escreva as condições KKT e determine o ponto KKT.

   (e) Determine explicitamente o problema dual

   (f) Encontre uma solução ótima do problema dual.

7. Considere o problema de minimização: minimizar $x - 4y + z$ sujeito a $x + 2y + 2z + 2 = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

   (a) Dado um ponto KKT, esse ponto deve ser ótimo?

   (b) Encontre a solução ótima do problema usando as condições KKT.

*Department of Mathematics, Federal University of Paraná, PR, Brazil. Email: albertoramos@ufpr.br.

8. *Problema de otimização minimax.* Seja $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\} \in \mathbb{R}^n$ um conjunto de vetores e dado $k \in \mathbb{N}$, defina o conjunto $\Delta(k) := \{x \in \mathbb{R}^k : \sum_{i=1}^k x_i = 1, x_i \geq 0, i = 1, \ldots, k\}$. Considere o problema de otimização:

$$\underset{x \in \Delta(n)}{\text{minimizar}} \;\; \max\{\langle a_i, x\rangle : i = 1, \ldots, m\}.$$

Mostre que o problema dual é

$$\underset{y \in \Delta(m)}{\text{maximizar}} \;\; \underset{x \in \Delta(n)}{\text{minimizar}} \;\; \langle y, Ax\rangle,$$

onde A é uma matriz onde as linhas são os vetores $a_1, \ldots, a_m$.

Dica: Re-escreva o problema $\underset{x \in \Delta(n)}{\text{minimizar}} \; \max\{\langle a_i, x\rangle : i = 1, \ldots, m\}$ como $\underset{x \in \Delta(n), v}{\text{minimizar}} \; v \quad \text{s.a.} \; \langle a_i, x\rangle \leq v, \;\; \forall i$, e aplique dualidade neste último problema.

9. Seja $b \in \mathbb{R}^n$. Solucione o seguinte problema de otimização

$$\begin{aligned} &\underset{x}{\text{minimizar}} && \sum_{j=1}^n x_j^2 \\ &\text{sujeito a} && \sum_{j=1}^n x_j = 1, \quad 0 \leq x_j \leq b_j, \quad j = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

10. Considere o problema de otimização minimizar $\;x^4 - 2y^2 - y\;$ sujeito a $\;x^2 + y^2 + y \leq 0$. Responda

 (a) O problema é convexo?

 (b) Mostre que existe solução ótima.

 (c) Encontre todos os pontos KKT. Para cada ponto, quais satisfazem a condição necessária de segunda ordem?

 (d) Encontre a solução global.

11. Seja $\alpha \in (0, 1)$. Define $x^0 := 1$, $\lambda^0 := 1$. Para $k \in \mathbb{N}$, $x^k := x^{k-1}$ (se k é par) ou α^{2^k} (se k é impar) e $\lambda^k := \alpha^{2^{k-1}}$. Mostre que a sequência (x^k, λ^k) converge quadraticamente a $(0, 0)$, mas a convergência de x^k ao 0 nem sequer é linear.

12. Considere o problema de minimização maximizar $\;f(\lambda) := x^T Bx$ sujeiro a $\|x\|^2 \leq 1$, onde B é uma matriz diagonal 2×2, com $B_{11} := 2$ e $B_{22} := 1$. Suponha que $x^0 := (1, 1)^T$ e seja λ^0 (não especificado). Encontre x^1 e λ^1 usando o método de programação sequencial quadrática. Sobre quais condições $\lambda^1 = \lambda^0$?

13. *Efeito Maratos para SQP.* Considere o problema de minimização

$$\text{maximizar} \quad f(\lambda) := 2(x^2 + y^2 - 1) - x \text{ sujeiro a } x^2 + y^2 = 1.$$

 (a) Mostre que $x^* := (1, 0)^T$ é minimizador global e um ponto KKT com multiplicador $\lambda^* := 3/2$.

 (b) Considere o ponto $x^k := (\cos\theta_k, \sin\theta_k)$ com $\theta_k \approx 0$. Verifique que x^k é viável e próximo de x^*

 (c) Considere $\lambda^k := \lambda^*$. Resolve o subproblema do método de programação quadrática sequêncial e mostre que a solução é $d^k := (\sin^2\theta_k, -\sin\theta_k\cos\theta_k)^T$. Qual é o multiplicador associado?

 (d) Prove que se $x^{k+1} := x^k + d^k$, então $f(x^{k+1}) > f(x^k)$ e x^{k+1} é inviável