Lista 3: Otimização II

A. Ramos *

October 10, 2017

Abstract

Lista em constante atualização.

1. Mínimos quadrados
2. Penalidade
3. Para os exercícios que forem convenientes pode ser usado alguma linguagem de programação.

1. Considere a função $f(x) = \frac{1}{2}r(x)^T r(x)$ onde $r(x) = (x_1^2 x_2, 2x_1x_2, e^{x1})^T$.
   (a) O sistema $r(x) = 0$ tem solução?
   (b) Calcule $f(x)$, $\nabla f(x)$, $\nabla^2 f(x)$, $J(x)$, $J(x)^T J(x)$ e $S(x)$. O termo $S(x)$ é pequeno?

2. Considere $r(x) = (x_1^2 + x_2^2, 2x_1x_2, 4x_2)^T$
   (a) O sistema $r(x) = 0$ tem solução? É única? Caso afirmativo, encontre-a e caso negativo justifique
   (b) Aplique duas iterações do método de Gauss-Newton com passo completo a partir do ponto $x^0 := (1, -1)^T$ para minimizar $f(x) = \frac{1}{2}r(x)^T r(x)$.

3. Seja $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $L \in M_{p\times n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}_{++}$. Considere o problema de mínimos quadrados regularizado
$$\text{minimizar } \|Ax - b\|^2 + \lambda\|Lx\|^2.$$
   Mostre que o problema tem solução única se, e somente se $\text{Ker}(A) \cap \text{Ker}(L) = \{0\}$.

4. Seja $r(x) := (r_1(x), \ldots, r_m)^T$ uma função vetorial onde cada função resíduo r_i junto com sua derivada são Lipschitziana com constante de Lipschitz L num compacto $K \subset \mathbb{R}^n$.
   Encontre as constante de Lipschitz para o Jacobiano $J(x)$ e para $\nabla f(x)$, com $f(x) := \frac{1}{2}r(x)^T r(x)$.

5. Considere um conjunto geral de dados $\{(t_i, y_i)\}_{i=1,\ldots,m}$ e suponha que queremos explicar essas observações usando o modelo $y = \phi(x, t) := x_1 e^{x_2 t} + x_3 + x_4 t$, onde $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ são parámetros desconhecidos os quais queremos estimar. Escreva o problema de estimar os parametros x como um problema de minimos quadrados. Determine $r(x)$, $f(x)$, $\nabla r(x)$, $\nabla f(x)$ e $\nabla^2 f(x)$.

6. Use o método de Gauss-Newton e Levenberg-Marquardt para resolver o problema de mínimos quadrados
$$\text{minimizar } f(x) := \frac{1}{2}[(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2], \text{ com ponto inicial } x^0 = (0, 0)^T.$$

7. Considere o problema de minimizar $f(x) := \frac{1}{2}\|Ax + b\|^2$, com $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ de posto completo e $m > n$. Usando a decomposição SVD para matriz A, $A = U\Sigma V^T$, prove que o minimo é
$$x^* = \sum_{i=1}^{n} \frac{u_i^T b}{\sigma_i} v_i,$$
   onde u_i e v_i são as colunas de U e V respectivamente, e os σ_i são os valores singulares de A. *Observe* que se σ_i é pequeno, a solução do problema x^* é bem sensível a pertubações do vetor b.

8. Considere a região $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \le 0\}$, onde $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$. Se $A \in M_{p\times p}(\mathbb{R})$ é uma matriz simétrica definida positiva, $P(x) := \max\{0, g(x)\}^T A \max\{0, g(x)\}$ pode ser usada como função penalidade.

9. Use a função de penalidade inversa para resolver o problema
$$\text{minimizar } -x_1^2 - x_2^2 \quad \text{sujeito a} \quad x_1 \le 8, x_2 \le 8, x_1 + x_2 \ge 1,$$
   com ponto inicial $x^0 := (2, 2)^T$.
   Observação: Se $\Omega := \{x : c_i \ge 0, i = 1, \ldots, m\}$, a função de penalidade inversa é $\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{c_i(x)}$.

*Department of Mathematics, Federal University of Paraná, PR, Brazil. Email: albertoramos@ufpr.br.

10. Seja $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1. Mostre que $\max^2\{0, g(x)\}$ é derivável e que o gradiente é $\max\{0, g(x)\}\nabla g(x)$.

11. Considere o método de barreira e $\mathcal{B}(x, \rho) := f(x) + \rho B(x)$. Mostre que:

    (a) $\mathcal{B}(x^{k+1}, \rho_{k+1}) \leq \mathcal{B}(x^k, \rho_k)$

    (b) $B(x^k) \leq B(x^{k+1})$

    (c) $f(x^{k+1}) \leq f(x^k)$

12. Considere o algoritmo de penalidade externa com penalidade quadrática $P(x) = \frac{1}{2}(\|h(x)\|^2 + \|\max\{0, g(x)\}\|^2)$ para os seguintes problemas de minimização.

    (a) Minimizar $x_1^2 + x_2^2$ s.a $2x_1 - x_2 = 2$

    (b) Minimizar $x_1^2 + x_2^2$ s.a $x_1 + x_2^2 \geq 2$

    Para cada problema mencionado

    (a) Represente graficamente a região factível

    (b) Encontre a solução global x^* e encontre os multiplicadores de Lagrange associados λ^* e μ^*.

    (c) Para cada ρ_k descreve o subproblema a resolver. Ache a solução global desse subproblema

    (d) Verifique se $\rho_k \to \infty$. Então, $x^k \to x^*$, $\rho_k h(x^k) \to \lambda^*$ e $\rho_k \max\{0, g(x)\} \to \mu^*$. Qual condição de qualificação cumpre x^*?

13. Mostre que a atualização $\lambda^{k+1} = \lambda^k + \rho_k h(x^k)$ corresponde ao método de máxima subida (gradiente) aplicado ao problema

$$\text{maximizar} f(x) + h(x)^T\lambda + \frac{\rho_k}{2}\|h(x)\|^2$$

    que é o dual do problema $min f(x)$ s.a $h(x) = 0$.

14. Em $\mathbb{R}$ considere o problema de minimização

$$\text{minimizar } \ln(x + 1) \text{ s. a. } x \geq 0$$

    (a) Use o método de barreira logaritmica para provar que se o parametro de penalidade μ é maior ou igual a 1, o subproblema não tem solução e quando μ é menor que 1, a solução é $x(\mu) = \mu/(1 - \mu)$. Mostre também que quando $\mu \to 0$, temos que $x(\mu) \to x^* = 0$ onde x^* é a solução ótima.

15. Considere o problema de otimização

$$\text{minimizar} x_1 x_2 \text{ sujeito a } 2x_2 - x_1 + 3 = 0.$$

    (a) Para quais valores do parametro de penalidade, o método de penalidade com penalidade quadrática tem mínimo ?

    (b) Calcule o mínimo de cada subproblema como função do parâmetro de penalidade. Encontre o ponto limite dessa sequência quando o parâmetro de penalidade vai para o infinito.