Lista 3: Geometria Analítica

A. Ramos *

25 de abril de 2017

Resumo

Lista em constante atualização.

1. Equação da reta e do plano;
2. Ângulo entre retas e entre planos.

Equação da reta

Equação vetorial. Uma reta r em $\mathbb{R}^n$, pode ser escrita como $r : P = P_0 + tV$, $t \in \mathbb{R}$ onde $V \neq \bar{0} \in \mathbb{R}^n$ é chamado de *vetor diretor*. Note que existe infinitos vetores diretores, todos eles paralelos. Se conhecemos dois pontos sobre a reta, por exemplo P_0 e P_1, o vetor $\overrightarrow{P_0P_1} \in \mathbb{R}^n$ serve como vetor diretor.

Equação geral da reta em $\mathbb{R}^2$ Quando a reta está em $\mathbb{R}^2$, podemos escrever a reta da forma $ax+by+c = 0$, para certos $a, b, c \in \mathbb{R}$, com $a^2 + b^2 \neq 0$. Dita forma se chama de *equação geral da reta ou equação normal*. Perceba que o vetor $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ é um vetor normal à reta.

Ainda mais, note que se (x_0, y_0) está sobre a reta $r : ax + by + c = 0$, temos que

$$(a, b) \perp ((x, y) - (x_0, y_0)), \text{ para todo } (x, y) \in r.$$

Em $\mathbb{R}^2$, podemos também escrever a reta r como o conjuntos dos pontos (x, y) tal que

$$y - y_0 = m(x - x_0), \text{ onde } m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0},$$

onde (x_0, y_0), (x_1, y_1) são pontos sobre a reta r. O número é chamado de *inclinação da reta* e *arctang*(m) é o ângulo de inclinação da reta. *Desenhe!*

Ângulo entre retas. Em $\mathbb{R}^n$, podemos definir o ângulo entre retas r_1 e r_2 como o ângulo que satisfaz a relação

$$\cos(r_1, r_2) = \frac{|V_1 \circ V_2|}{\|V_1\|\|V_2\|},$$

onde V_1 é um vetor diretor da reta r_1 e V_2 é um vetor diretor da reta r_2. Observe que na formula usamos o *valor absoluto* de $V_1 \circ V_2$ em lugar de $V_1 \circ V_2$.

Distância de um ponto a uma reta em $\mathbb{R}^2$. Considere uma reta $r : ax + by + c = 0$ e um ponto $P = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$. A distância de ponto P à reta r é dado pela formula

$$\text{dist}(P, r) = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\|(a, b)\|}. \tag{1}$$

Alternativamente, se P_0 pertence à reta r, dist(P, r) é a norma da projeção do vetor $\overrightarrow{P_0P}$ sobre um vetor normal à reta r, isto é, $\text{dist}(P, r) = \|\text{proj}_V \overrightarrow{P_0P}\|$ onde V é um vetor normal à reta r.

Distância de um ponto a uma reta em $\mathbb{R}^3$. Em $\mathbb{R}^3$, se $r : P = P_0 + tV$, $t \in \mathbb{R}$. A distância de ponto P_1 à reta r é dado pela formula

*Department of Mathematics, Federal University of Paraná, PR, Brazil. Email: `albertoramos@ufpr.br`.

$$\text{dist}(P,r) = \frac{|\overrightarrow{P_0P_1} \times V|}{\|V\|}. \tag{2}$$

Observe as diferenças e semelhanças entre (1) *e* (2)

Proceda a responder as seguintes questões

1. Uma partícula está animada de um movimento tal que, no instante t, ela se encontra no ponto
$$(x,y,z) = (2+3t, 1+4t, t-3).$$
   (a) Determine sua posição nos instantes $t=0$, $t=1$ e $t=2$;
   (b) Determine o instante no qual a partícula atinge o ponto $(11,13,0)$;
   (c) A partícula passa por $(5,6,7)$;
   (d) Descreva sua trajetória;
   (e) Determine sua velocidade no instante t.

2. Faça um esboço das seguintes retas
   (a) $(x,y,z) = (3-3t, 3t, 2+t), t \in \mathbb{R}$
   (b) $(x,y,z) = (2t-1, 1+t, 0), t \in \mathbb{R}$
   (c) $(x,y,z) = (1, 1+2t, \frac{7}{4}+\frac{3}{2}t), t \in \mathbb{R}$

3. Se $P = (4,1,-1)$ e $r : (x,y,z) = (2+t, 4-t, 1+4t)$, $t \in \mathbb{R}$. O ponto P pertence a r?

4. Mostre que a reta $r : 4x+3y-40=0$ é tangente ao círculo de radio 5 e centro $C=(3,1)$. Encontre as coordenadas do ponto de tangência. *Rpta:* $T = (7,4)$.

5. Seja um circulo de centro $C=(-2,-4)$ que é tangente à reta $r : x+y+12=0$. Calcule a àrea do círculo. *Rpta:* $18\pi u^2$.

6. Encontre a equação da reta que passa por $P=(9,5)$ que é tangente ao círculo de centro $C=(-1,-5)$ e radio $2\sqrt{10}$. *Dica:* Duas soluções $r_1 : 3x-y-22=0$ e $r_2 : x-3y+6=0$.

7. Um círculo passa pelo pontos $A=(-3,3)$ e $B=(1,4)$ cujo centro está sobre a reta $r : 3x-2y-23=0$. Encontre o centro e o radio do circulo. *Rpta:* $Centro = (2,-17/2)$, $radio = \sqrt{629/4}$.

8. Encontre o centro e o radio dum circulo que passa por $A=(5,9)$ tal que $B=(1,1)$ é o ponto de tangência com a reta $r : x+2y-3=0$. *Rpta:* $Centro = (3,5)$, $radio = \sqrt{20}$.

9. Considere duas retas r e s reversas que passa por $A=(0,1,0)$ e $B=(1,1,0)$ e por $C=(-3,1,-4)$ e $D=(-1,2,-7)$ respectivamente. Obtenha uma equação da reta concorrente com r e s que é paralela ao vetor $V=(1,-5,-1)$. *Dica:* concorrentes= interseção num único ponto, reversa=nem concorrentes nem paralelas. Desenhe. *Rpta:* $r : (-\frac{23}{4}+t, 1-5t, -t)$, $t \in \mathbb{R}$.

10. * Uma partícula vai do ponto $A=(2,3)$ ao ponto $B=(10,9)$ passando por um ponto $P=(x,0)$, $(x>0)$. Determine o valor de x, para que o percorrido seja o mínimo possível. *Rpta:* $x=4$. *Dica:* Derive uma função adequada.

11. Dada a reta $r_1 : 3x-2y+12=0$, considere a equação da reta r_2 paralela a r_1 e que forma com os eixos coordenados um trapézio de área $15u^2$. *Rpta:* $r_2 : 2y-3x=18$.

12. Encontre a equação vetorial de uma reta que determina quando intercepta aos eixos coordenados um segmento cujo ponto médio é $(-4,8)$. *Rpta:* $r : (-4,8)+t(1,2)$.

13. Considere as retas $r_1 = \{(b^2+a^3-2)+t(1-a^2,a) : t \in \mathbb{R}\}$ e $r_2 = \{(ab, 3b+5)+s(a-5, 8-3a) : s \in \mathbb{R}\}$. Encontre os valores de a e b para que as retas sejam coincidentes. *Rpta:* $a=2, b=5$.

14. Mostre as formulas para as distância de um ponto a uma reta (1) e (2).
15. Se $P = (1, -1, 2)$ e $r : (x, y, z) = (1 - 2t, t, 2 + 3t)$, $t \in \mathbb{R}$. Calcule a distância de P à reta r. *Rpta:* $\sqrt{13/14}$.
16. Se uma reta passa por $(1, -2, 3)$ e forma um ãngulo de $60°$ com o eixo y e um ângulo de $45°$ com o eixo x. Encontre uma equação para dita reta. *Rpta:* $r : (1, -2, 3) + t(\sqrt{2}/2, \pm 1/2, \pm 1/2)$, $t \in \mathbb{R}$.
17. Se $r : P = (1, 0, 0) + t(1, 1, 1)$, $t \in \mathbb{R}$ e os pontos $A = (1, 1, 1)$ e $B = (0, 0, 1)$. Ache o ponto de r equidistante de A e B. *Rpta:*
18. Quais são as coordenadas de um ponto Q, simétrico do ponto $P = (0, 0, 1)$ em relação à reta $r : (x, y, z) = (t, t, t)$, $t \in \mathbb{R}$?
19. Considere duas retas
$$r : (x, y, z) = (t - 1, 2 + 3t, 4t), t \in \mathbb{R} \text{ e } s : x = \frac{y - 4}{2} = \frac{z - 3}{3}.$$
Encontre uma equação da reta que intercepta as retas r e s é perpendicular a ambas.

Equação da circunferência. Em $\mathbb{R}^2$, a equação $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ representa uma circuferência de radio $r \neq 0$, somente se
$$D^2 + E^2 - 4F > 0.$$
As coordenadas do centro $C = (-D/2, -E/2)$ com radio $r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$.

1. Mostre que as circuferências $C_1 : x^2 + y^2 + 2x - 8y + 13 = 0$ e $C_1 : 4x^2 + 4y^2 - 40x + 8y + 79 = 0$ não se interceptam.
2. Encontre a equação da reta que passa por $P = (11, 4)$ e é tangente à circuferência $C : x^2+y^2-8x-6y = 0$. *Rpta:* $r : 3x + 4y - 49 = 0$ ou $r : 4x - 3y - 32 = 0$
3. Ache a equação da circunferência que passa por $A = (1, 4)$ e é tangente à circuferência $C : x^2 + y^2 + 6x + 2y + 5 = 0$ no ponto $B = (-2, 1)$. *Rpta:* $C_1 : (x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 5$
4. Qual é a equação da circunferência com centro C=(-4,3) e é tangente à circuferência $C : x^2+y^2-4x+3y = 0$. *Rpta:* $C : (x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 25$ ou $C : (x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 100$.

Equação do plano

Equação vetorial. Um plano π em $\mathbb{R}^n$, pode ser escrita como $\pi : P = P_0 + tV + sW$, $t, s \in \mathbb{R}$ onde V, W são linearmente independentes. Note que existe infinitos vetores V e W que geram o mesmo plano. Se conhecemos três pontos sobre a reta, por exemplo P_0, P_1 e P_2, os vetores $\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2} \in \mathbb{R}^n$ servem como geradores do plano π, se $\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}$ são linearmente independentes (*por que?*). Assim, qualquer vetor paralelo a π pode ser escrito como combinação linear de V e W.

Equação normal do plano em $\mathbb{R}^3$ Quando o plano está em $\mathbb{R}^3$, podemos escrever o plano da forma
$$ax + by + cz + d = 0, \text{ para certos } a, b, c, d \in \mathbb{R},$$
com $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$. Dita forma se chama de *equação geral do plano ou equação normal.* Perceba que o vetor $(a, b, c) \in \mathbb{R}^2$ é um vetor normal ao plano.

Se V e W são vetores paralelos ao plano, $V \times W$ serve como vetor normal ao plano.

Veja que se (x_0, y_0, z_0) está sobre o plano π $\pi : ax + by + cz + d = 0$, temos que
$$(a, b, c) \perp ((x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)), \text{ para todo } (x, y, z) \in \pi.$$

Em $\mathbb{R}^3$, considere dois plano π_1 e π_2 com $\pi_1 \cap \pi_2 \neq \emptyset$. Certamente, $\pi_1 \cap \pi_2$ é uma reta (*por que?*). Podemos facilmente encontrar um *vetor diretor* calculando $N_1 \times N_2$, onde N_1 e N_2 são vetores normais ao planos π_1 e π_2 respectivamente.

Ângulo entre planos. Em $\mathbb{R}^3$, podemos definir o ângulo entre dois planos π_1 e π_2 como o ângulo que satisfaz a relação

$$\cos(\pi_1, \pi_2) = \frac{|N_1 \circ N_2|}{\|N_1\|\|N_2\|},$$

onde N_1 e N_2 são vetores normais ao planos π_1 e π_2 respectivamente. Observe que na formula usamos o *valor absoluto* de $N_1 \circ N_2$ em lugar de $N_1 \circ N_2$.

Distância de um ponto a um plano em $\mathbb{R}^3$. Considere um plano $\pi : ax + by + cz + d = 0$ e um ponto $P = (x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3$. A distância de ponto P ao plano π é dado pela formula

$$\text{dist}(P, \pi) = \|\text{proj}_N \overrightarrow{P_0P}\|, \tag{3}$$

onde P_0 é um ponto em π e N é um vetor normal ao plano. Note que podemos usar $N = (a, b, c)$.

1. Faça um esboço dos seguintes planos em $\mathbb{R}^3$.
   (a) $2x + 3y + 5z - 1 = 0$
   (b) $3y + 2z - 1 = 0$
   (c) $2x + 3z - 1 = 0$
   (d) $3x + 2y - 4 = 0$

2. Encontre a equação geral do plano paralelo a $2x - y + 5z - 3 = 0$ e passa no ponto $P = (1, -2, 1)$. *Rpta* $\pi : 2x - y + 5z - 9 = 0$.

3. Ache a equação do plano que contem $P = (2, 1, 5)$ e é perpendicular aos planos $x + 2y - 3z + 2 = 0$ e $2x - y + 4z - 1 = 0$. *Rpta* $x - 2y - z + 5 = 0$. *Dica* Use o produto vetorial.

4. Considere as retas
$$r : \frac{x-2}{2} = \frac{y}{2} = z \text{ e } s : x - 2 = y = z.$$
   Obtenha a equação geral do plano determinado por r e s.

5. Sejam dois planos $\pi_1 : x + 2y + z + 2 = 0$ e $x - y + z - 1 = 0$. Encontre o plano que contém a interseção $\pi_1 \cap \pi_2$ e é ortogonal ao vetor $U = (1, 1, 1)$. *Rpta:* $x - 2y + z - 2 = 0$.

6. Encontre a equação do plano que passa por $A = (1, 0, -2)$ e contém $\pi_1 \cap \pi_2$, onde $\pi_1 : x + y - z = 0$ e $\pi_2 : 2x - y + 3z - 1 = 0$.

7. Qual é a equação paramétrica da reta que é interseção dos planos, $\pi_1 : (x, y, z) = (1 + \alpha, -2, -\alpha - \beta)$ e $\pi_2 : (x, y, z) = (1 + \alpha - \beta, 2\alpha + \beta, 3 - \beta)$?

8. Sejam três vetores $V = i + 3j + 2k$, $W = 2i - j + k$ e $U = i - 2j$ em $\mathbb{R}^3$. Se π é um plano paralelo aos vetores W e U, e r é uma reta perpendicular ao plano π. Encontre a projeção ortogonal de V sobre o vetor diretor da reta r.

9. Em $\mathbb{R}^3$, considere os pontos $A = (2, -2, 4)$ e $B = (8, 6, 2)$. Encontre o lugar geométrico dos pontos equidistantes de A e B. *Dica :* É um plano.

10. Seja π um plano que forma um ângulo de $60°$ com o plano $\pi_1 : x + z = 0$ e contém a reta $r : x - 2y + 2z = 0, 3x - 5y + 7z = 0$. Encontre a equação do plano π. *Rpta* Dois soluções: $y + z = 0$ ou $4x - 11y + 5z = 0$.

11. O plano $\pi : x + y - z - 2 = 0$ intercepta os eixos cartesianos aos pontos A, B e C. Qual é a área do triângulo ABC? *Rpta* $2\sqrt{3}u^2$.

12. Considere os planos:

$$\pi_1 : x - y + z + 1 = 0, \quad \pi_2 : x + y - z - 1 = 0, \quad \pi_3 : x + y + 2z - 2 = 0.$$

Encontre a equação geral que contém $\pi_1 \cap \pi_2$ e perpendicular π_3.

13. Ache o ângulo entre o plano $-2x + y - z = 0$ e plano que passa por $P = (1, 2, 3)$ e é perpendicular $ai - 2j + k$. *Rpta:* $arccos(5/6)$.

14. Para quais valores de α e β, a reta $r : (\beta, 2, 0) + t(2, \alpha, \alpha)$ está contida no plano $\pi : x - 3y + z = 1$. *Rpta:* $\alpha = 1$, $\beta = 7$.

15. Encontre o valor de α para que os planos $\pi_1 : (1, 1, 0) + t(\alpha, 1, 1) + s(1, 1, \alpha)$ e $\pi_2 : 2x + 3y + 2z + 1 = 0$ sejam paralelos. *Rpta:* $\alpha = 1/2$.

16. Encontre a equação geral do plano π que contém a reta $r : (1, 0, 1) + t(1, 1, -1)$ e dista $\sqrt{2}$ do ponto $P = (1, 1, -1)$.