CM005 Álgebra Linear
Lista 3

Alberto Ramos

- Seja $T : V \to V$ uma transformação linear. Se temos que $Tv = \lambda v$, $v \neq \bar{0}$, para $\lambda \in \mathbb{K}$. Dizemos que λ é um *autovalor* de T e v *autovetor* de T associado a λ. Observe que λ é um autovalor se λ é raíz do *polinômio característico* $p(\lambda) := det(A - \lambda I)$, onde $A = [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ e $\mathcal{B}$ é uma base de V.

  O polinômio característico $p(\lambda)$ independe da escolha da matriz associada à T e da base $\mathcal{B}$. Como os autovalores são as raízes de $p(\lambda)$, os autovalores também independente da matriz associada e assim, eles são intrinsecamente associados à transformação linear T.

  Seja A uma matriz quadrada. Se $v \neq \bar{0}$ satisfaz que $Av = \lambda v$, dizemos que v é um autovetor de A associado a λ e λ autovalor de A.

- Uma matriz quadrada $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ é *diagonalizável* se existe uma matriz S invertível e uma matriz diagonal D tal que $A = SDS^{-1}$. Lembre que D é uma matriz diagonal se $D_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$.

  - De $A = SDS^{-1}$, temos que $AS = SD$. Fazendo contas vemos que as colunas de S deve estar formada por os autovetores de A e os elementos da diagonal de D são os autovalores.

- Uma transformação linear $T : V \to V$, onde V tem dimensão finita, é *diagonalizável* se existe uma base $\mathcal{B}$ de V, tal que a matriz $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ é diagonalizável.

- *Teorema:* Uma transformação linear $T : V \to V$, com $dim(V) = n$ é diagonalizável se, e somente se, ele possui n autovetores linearmente independentes.

  Isto é, *T é diagonalizável se, e somente se, o espaço V tem uma base formada de autovetores de T.*

  Para saber se T (ou A) é diagonalizável devemos:

  - Achar todas as raízes do polinômio característico $p(\lambda)$. Lembre que as raízes são os autovalores.
  - Calcular para cada λ autovalor, uma base de $Nuc(A - \lambda I)$.

- Junte todas essas bases. Esse novo conjunto é um conjunto l.i. Denotemos esse conjunto por $\mathcal{B}$. Se $\mathcal{B}$ tem n elementos, temos que T (ou A) é diagonalizável. Caso contrário, ele não é diagonalizável.

  Em outras palavras, se $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ são os autovalores diferentes de A, e $dim(Nuc(A - \lambda_i I)) = m_i$, $i = 1, \ldots, k$. Temos que T (ou A) é diagonalizável se e somente se,

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n.$$

- Uma condição suficiente para ser diagonalizável é que todos os autovalores de T sejam diferentes.
- Se $Nuc(A - \lambda I) = \{\bar{0}\}$, então λ não pode ser um autovalor de A.

Com essas informações:

1. Encontre o polinômio característico, autovalores e autovetores das matrizes

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

   Resposta:
   (a) $p(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda - 2)$;
   $Nuc(A - 2I) = \{\alpha(-1, 1)^T : \alpha \in \mathbb{R}\}$; $Nuc(A - 3I) = \{\alpha(-1, 2)^T : \alpha \in \mathbb{R}\}$
   (b) $p(\lambda) = -(\lambda - 3)(\lambda - 1)(\lambda + 2)$;
   $Nuc(A+2I) = \{\alpha(0, 0, 1)^T : \alpha \in \mathbb{R}\}$; $Nuc(A-1I) = \{\alpha(6, 3, 8)^T : \alpha \in \mathbb{R}\}$;
   $Nuc(A - 3I) = \{\alpha(0, 5, 2)^T : \alpha \in \mathbb{R}\}$.
   (c) $p(\lambda) = -(\lambda - 2)(\lambda - 4)(\lambda + 1)$;
   $Nuc(A - 2I) = \{\alpha(2, 3, -2)^T : \alpha \in \mathbb{R}\}$;
   $Nuc(A - 4I) = \{\alpha(8, 5, 2)^T : \alpha \in \mathbb{R}\}$;
   $Nuc(A + 1I) = \{\alpha(-1, 0, 1)^T : \alpha \in \mathbb{R}\}$.

2. Verifique quais das matrizes são diagonalizáveis

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \ (\alpha \in \mathbb{R})$$

3. Se $v_1 = (-4, -4, -1)^T$, $v_2 = (5, 4, 1)^T$ e $v_3 = (5, 3, 1)^T$ são autovetores da matriz

$$\begin{pmatrix} -1/3 & -5/6 & 20/3 \\ -2/3 & -1/6 & 16/3 \\ -1/6 & -1/6 & 11/6 \end{pmatrix}$$

   Responda:

(a) Sem obter o polinômio característico determine os autovalores que correspondem a estes autovetores;

(b) A matriz A é diagonalizável?

Resposta: (a) autovalores$= 1/2, 1/3$ (b) sim!

4. Mostre que se A e B são semelhantes, então ambas matrizes tem o mesmo polinômio característico.

5. Se A é uma matriz triangular superior (inferior), então os autovalores de A são os elementos da diagonal principal de A (i.e. os elementos A_{ii}).

6. Fatore cada uma das matrizes A em um produto $A = PDP^{-1}$, onde D é uma matriz diagonal.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Resposta:

(e) $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(f) Não é diagonalizável

(g) $P = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

(h) $P = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

7. Para as matrizes do item anterior, use a fatoração SDS^{-1} para calcular A^3 e para aquelas matrizes invertíveis calcule A^{-1}.

8. Para cada uma das matrizes a seguir, encontre uma matriz B com $B^2 = A$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 9 & -5 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dica: Use a fatorização, $A = SDS^{-1}$.

9. Seja A matriz diagonalizável cujos autovalores são iguais a 1 ou a -1. Verifique que $A^{-1} = A$.

10. Mostre que qualquer matriz da forma

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

não é diagonalizável independente do valor de a ou b.

Dica: Analize $Nuc(A - \lambda I)$, para λ sendo um autovalor adequado.

11. Seja uma matriz A de ordem 4×4, e seja λ um autovalor de multiplicidade 3. Se o posto de $A - \lambda I$ é 1. Mostre que A é diagonalizável.

12. Encontre os valores de α, para os quais a matriz não é diagonalizável ou mostre que não existe tal valor.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 6 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Resposta: (a) não existe; (b) $\alpha = 2$; (c) $\alpha \in \{-1, 3\}$; (d) $\alpha = 1$.

13. Mostre que se A e B são duas matrizes com a mesma matriz diagonalizante S, então $AB = BA$. Em outras palavras, A e B comutam entre si.

14. Considere a transformação linear $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ definida como

$$T(p)(x) = (3x + 2)p'(x) + p(x), \text{ para todo } p \in \mathcal{P}_2.$$

Determine todos os autovalores e autovetores de T. Para isso:

   (a) Calcule a matriz associada a T em relação à base $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$.

   (b) Ache todos os autovalor e autovetores de $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$;

   (c) Escreva o elemento correspondente em $\mathcal{P}_2$ para cada autovetores de $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$.

Resposta: (a) $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$;

(b) Autoespaços de $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$:

$\{\alpha(1, 0, 0) : \alpha \in \mathbb{R}\}$, $\{\alpha(2, 3, 0) : \alpha \in \mathbb{R}\}$ e $\{\alpha(4, 12, 9) : \alpha \in \mathbb{R}\}$.

(c) Os autoespaçoes correspondem aos subespaços de $\mathcal{P}_2$:

$\{\alpha : \alpha \in \mathbb{R}\}$, $\{2\alpha + 3\alpha x : \alpha \in \mathbb{R}\}$ e $\{4\alpha + 12\alpha x + 9\alpha x^2 : \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Considere um espaço vetorial V de dimensão finita, munido com um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Usando o produto interno podemos "medir o tamanho" de um vetor v, como

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

Além disso para v e w em V diferentes de zero, podemos "medir o ângulo" entre v e w, usando a relação

$$\cos(\theta) = \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\|\|w\|}.$$

Quando $\theta = 90^\circ$ dizemos que v e w são ortogonais, em outras palavras, v e w são ortogonais se e somente se, $\langle v, w\rangle = 0$. Usamos a notação $v \perp w$ quando $\langle v, w\rangle = 0$.

Dado um subespaço X de V, $X^\perp := \{v \in V : \langle v, x\rangle = 0 \;\; \forall x \in X\}$. $X^\perp$ é chamado de *espaço ortogonal* (ou *complemento ortogonal*) de X. Observe que sempre temos que $X^\perp$ é um subespaço vetorial e

- $X \cap X^\perp = \{\bar{0}\}$. Isto é, o único elemento de V que está em X e $X^\perp$ simultaneamente é o elemento zero.
- $V = X \oplus X^\perp$. Assim, todo elemento v de V pode ser escrito (de forma única) como $v = x + y$, onde x está em X e y está em $X^\perp$.
- $(X^\perp)^\perp = X$, i.e., o espaço ortogonal de $X^\perp$ é o próprio X.
- Temos que $\{\bar{0}\}^\perp = V$ e $V^\perp = \{\bar{0}\}$.
- Se X tem uma base $\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$. Para verificar que v está em $X^\perp$ é suficiente verificar que $\langle v, x_i\rangle = 0$, para todo $i = 1, \ldots, r$.

Em $\mathbb{R}^n$, existe um produto interno natural, $\langle \bar{x}, \bar{y}\rangle = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$, chamado também de produto escalar. Agora, seja $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Associada a essa matriz temos quatro espaços fundamentais: $Nuc(A)$, $col(A)$, $Nuc(A^T)$ e $col(A^T)(= lin(A))$, onde A^T é a transposta de A. É fácil ver que

$$\langle \bar{y}, A\bar{x}\rangle = \langle A^T\bar{y}, \bar{x}\rangle = 0, \quad \text{para todo } \bar{x} \in \mathbb{R}^n, \bar{y} \in \mathbb{R}^m.$$

Podemos relacionar os quatros espaços fundamentais, usando a ideia de complemento ortogonal. De fato, temos que:

$$Nuc(A) = col(A^T)^\perp \;\text{ e }\; Nuc(A^T) = col(A)^\perp$$

e como consequência

$$Nuc(A)^\perp = col(A^T) \;\text{ e }\; Nuc(A^T)^\perp = col(A).$$

Usando essas informações responda e/ou calcule:

15. Para cada uma das matrizes a seguir determine uma base para $col(A^T)$, $Nuc(A)$, $col(A)$ e $Nuc(A^T)$.

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Resposta:
(a) Para $col(A^T)$ uma base é $\{(3,4)^T\}$;
Para $Nuc(A)$ uma base é $\{(-4,3)^T\}$;
Para $col(A)$ uma base é $\{(1,2)^T\}$;
Para $Nuc(A^T)$ uma base é $\{(-2,1)^T\}$.
(d) Para $col(A^T)$ uma base é $\{(1,0,0,0)^T,(0,1,0,0)^T,(0,0,1,1)^T\}$;
Para $Nuc(A)$ uma base é $\{(0,0,-1,1)^T\}$;
Para $Nuc(A^T)$ uma base é $\{(1,1,1,-1)^T\}$.
Para $col(A)$ uma base é $\{(1,0,0,1)^T,(0,1,0,1)^T,(0,0,1,1)^T\}$.

16. Seja X o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado por $\bar{x}=(2,-2,2)^T$.
    (a) Encontre uma base para $X^\perp$.
    (b) Descreva geometricamente X e $X^\perp$.

    Resposta: Uma base é $\{(1,1,0)^T,(-1,0,1)^T\}$.

17. Seja X o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado por $\bar{x}_1=(2,0,-4,2)^T$, $\bar{x}_2=(0,1,3,-2)^T$. Encontre uma base para $X^\perp$.

    Resposta:
    Uma base é $\{(-1,2,0,1)^T,(2,-3,1,0)^T\}$.

18. Seja $\langle\cdot,\cdot\rangle$ um produto interno de V. Verifique as seguintes identidades
    - *Identidade polar:* $\langle v,w\rangle=\frac{1}{4}(\|v+w\|^2-\|v-w\|^2)$.
    - *Lei do paralelogramo:* $\|v\|^2+\|w\|^2=\frac{1}{2}(\|v+w\|^2+\|v-w\|^2)$.

19. Sejam X, Y subespaços de $\mathbb{R}^n$. Mostre que (a) $(X+Y)^\perp=X^\perp\cap Y^\perp$; (b) $(X\cap Y)^\perp=X^\perp+Y^\perp$; (c) se $X\subset Y$, então $Y^\perp\subset X^\perp$.

20. Seja $P=A(A^TA)^{-1}A^T$, onde A é uma matriz $m\times n$ de posto r.
    (a) Verifique de $P\bar{b}=\bar{b}$ para todo $\bar{b}\in col(A)$.
    (b) Se $\bar{b}\in col(A)^\perp$, então $P(\bar{b})=\bar{0}$.
    (c) Se $r=n$, mostre que $P^2=P$.
    (d) Se $r=n$, verifique que P é simétrica.
    Dica: Use a propriedade $(B^{-1})^T=(B^T)^{-1}$ para toda matriz B invertível.

Em muitos casos certas bases são melhores que outras, entre elas, as bases ortogonais têm um lugar relevante. Seja $\mathcal{B}=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ uma base de V.

Dizemos que $\mathcal{B}$ é uma *base ortogonal*, se $\mathcal{B}$ é uma base e $\langle v_j,v_i\rangle=0$ para $i\neq j$. A grosso modo, $\mathcal{B}$ é uma base ortogonal se $\mathcal{B}$ é uma base onde o vetor v_j não influência ou é influenciada por v_i para $i\neq j$. Se adicionalmente pedimos que $\|v_i\|=1$ para todo $i=1,\ldots,n$, dizemos que $\mathcal{B}$ é uma *base ortonormal.*

Uma base ortogonal possuem propriedades interessantes

- Seja $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ uma *base ortonormal*. Então, sempre temos que

$$\|\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n\|^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_n^n.$$

  A última expressão é chamado de *fórmula de Parseval*.

- Seja $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ uma base ortonormal. Se $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$ e $w = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_n v_n$, então: $\langle v, w\rangle = \alpha_1\beta_1 + \cdots + \alpha_n\beta_n$.

- Seja $X \subset V$ um subespaço vetorial. Considere uma base ortogonal $\mathcal{B}_X = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de X. Então, a *projeção ortogonal* de v sobre X, $\text{proj}_X(v)$, é dada por

$$\text{proj}_X(v) = \frac{\langle v, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 + \frac{\langle v, v_2\rangle}{\|v_2\|^2} v_2 + \cdots + \frac{\langle v, v_n\rangle}{\|v_n\|^2} v_n.$$

  Lembre que a projeção ortogonal de v sobre X, $\text{proj}_X(v)$, é o único elemento de X tal que $v - \text{proj}_X(v) \in X^{\perp}$.

  Os números $\langle v, v_1\rangle/\|v_1\|^2, \dots, \langle v, v_n\rangle/\|v_n\|^2$ são chamados *coeficientes de Fourier* de v em relação a $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$.

  As vezes denotemos $\text{proj}_X(v)$ por $\text{proj}(v; X)$.

Sabemos que todo espaço vetorial tem base, mas será que ele admite uma base ortogonal? A resposta é sim. O processo de Gram-Schmidt é o processo pelo qual apartir de uma base qualquer chegamos a outra base que é ortogonal.

Seja $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ uma base de V. Defina de forma recursiva os vetores $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$

$$\begin{array}{ll}
u_1 := v_1 & \\
u_2 := v_2 - \frac{\langle v_2, u_1\rangle}{\|u_1\|^2} u_1 & (= v_2 - \text{proj}(v_2; Span\{u_1\})) \\
u_3 := v_3 - \frac{\langle v_3, u_1\rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle v_3, u_2\rangle}{\|u_2\|^2} u_2 & (= v_3 - \text{proj}(v_3; Span\{u_1, u_2\})) \\
\dots & \\
u_n := v_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle v_n, u_i\rangle}{\|u_i\|^2} u_i & (= v_n - \text{proj}(v_n; Span\{u_1, u_2, \dots, u_{n-1}\}))
\end{array}$$

- O conjunto $\mathcal{U} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ é uma base ortogonal de V obtido pelo processo de Gram-Schmidt. *Para que $\mathcal{U}$ seja uma base ortonormal basta dividir cada elemento por sua respectiva norma.*

- Uma possível alternativa para achar uma base ortogonal para um subespaço $X \subset \mathbb{R}^m$, é escrever X como $col(A)$ para certa matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, achar uma base para $col(A)$ e logo fazer o processo de Gram-Schmidt para essa base.

Com essas informações responda

21. Para cada matriz, use o processo de Gram-Schmidt para encontrar uma base ortogonal para $col(A)$.

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}$$

Resposta:
(a)$\{(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})^T, (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 2)^T\}$;
(b)$\{(2/\sqrt{5}, 1\sqrt{5})^T, (-1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})^T\}$.

22. Dada a base $\{(1,2,-2)^T, (4,3,2)^T, (1,2,1)^T\}$ em $\mathbb{R}^3$. Use o processo de Gram-Schmidt para encontrar uma base ortogonal.

Resposta: $\{(1/3, 2/3, -2/3)^T, (2/3, 1/3, 2/3)^T, (-2/3, 2/3, 1/3)^T\}$.

23. Considere o espaço vetorial $C[-1,1]$ munido do produto interno

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx.$$

Encontre uma base ortonormal para o subespaço gerado por $\{1, x, x^2\}$.

Resposta:

Uma escolha de base é $\{u_1(x), u_2(x), u_3(x)\}$, onde $u_1(x) = 1/\sqrt{2}$; $u_2(x) = (\sqrt{6}/2)x$; $u_3(x) = (3\sqrt{10}/4)(x^2 - 1/3)$.

24. Encontre uma base ortonormal para o subespaço de $\mathbb{R}^3$ formado por todos os vetores (a, b, c) tais que $a + b + c = 0$.

Resposta: Uma base é $\{(-1, 0, 1)^T, (-1, 1, 0)^T\}$.

25. Procure uma base ortonormal para $X = \{(a, b, c, d)^T : a - b - 2c + d = 0\}$.

Resposta: Uma possível escolha é $\{(-1, 0, 0, 1)^T, (2, 0, 1, 0)^T, (1, 1, 0, 0)^T\}$.

26. Considere os vetores $\bar{x}_1 = (1/2)(1, 1, 1, -1)^T$ e $\bar{x}_2 = (1/6)(1, 1, 3, 5)^T$. Os vetores $\bar{x}_1$ e $\bar{x}_2$ formam um conjunto ortonormal de $\mathbb{R}^4$. Estenda esse conjunto a uma base ortonormal de $\mathbb{R}^4$, isto é, encontre $\bar{x}_3$ e $\bar{x}_4$ tal que $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4\}$ seja uma base ortonormal, encontrando uma base ortogonal para o núcleo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Considere uma matriz $Q \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ cujas *colunas formam um conjunto ortonormal* de $\mathbb{R}^n$. Dita matriz é chamada de *matriz ortogonal* e possue as seguintes propriedades:

- $Q^T Q = I$, equivalentemente $Q^T = Q^{-1}$
- $\langle Q\bar{x}, Q\bar{y} \rangle = \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle$, para todo $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$, "*$Q$ preserva o produto interno*".

- $\|Q\bar{x}\| = \|\bar{x}\|$, para todo $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, "*Q preserva a norma*".

Exemplo de matriz ortonormal é

$$Q_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Matrizes ortogonais servem para levar bases ortogonais em bases ortogonais.

27. Verifique:

    (a) Se Q é uma matriz ortogonal então $|\lambda| = 1$ para todo autovalor de Q;

    (b) Se Q é uma matriz simétrica, então $\lambda \geq 0$ para todo autovalor de Q.

28. Ache as coordenadas do ponto $\bar{p}$ em relação ao sistema de coordenadas $\mathcal{B}$, nos seguintes casos:

    (a) $\mathcal{B} = \{(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})^T, (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})^T\}$ e $\bar{p} = (1, 3)^T$
    (b) $\mathcal{B} = \{(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)^T, (0, 0, 1)^T, (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)^T\}$ e $\bar{p} = (2, -1, 2)^T$

    Rpta: As novas coordenadas de $\bar{p}$ são (a) $(-\sqrt{2}, 2\sqrt{2})^T$; (b) $(3\sqrt{2}/2, 2, \sqrt{2}/2)$.

Algumas propriedades de $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ quando A é simétrica.

- Se A é simétrica e λ e μ são autovalores diferentes com autovetores v e w, então $\langle v, w\rangle = 0$. Em outras palavras, $Nuc(A - \lambda I) \perp Nuc(A - \mu I)$, se λ e μ são autovalores diferentes.

- *Teorema espectral para matrizes simétricas*

  Toda matriz A simétrica pode ser escrita como QDQ^T, onde Q é uma matriz ortogonal ($Q^T = Q^{-1}$) e D uma matriz diagonal.

  Para calcular Q observe que:

  – Como os autovetores associados a diferentes autovalores já são ortogonais, para diagonalizar a matriz simétrica A através de uma matriz ortogonal Q, só precisamos encontrar, para cada autovalor, uma base de autovetores ortonormais associados a eles. Aqui podemos podemos aplicar o processo de Gram-Schmidt a cada conjunto de autovetores l.i. associados a cada um dos autovalores.

29. Para cada uma das seguintes matrizes simétricas, ache uma matriz ortogonal Q e uma matriz diagonal D tal que $Q^TAQ = D$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Resposta:

(a) $Q = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix};$

(b) $Q = \begin{pmatrix} 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

(c) $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$

(d) $Q = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

(e) $Q = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{6}/6 & \sqrt{3}/3 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{6}/6 & \sqrt{3}/3 \\ 0 & \sqrt{6}/6 & \sqrt{3}/3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$

Problemas de mínimos quadráticos. (a) Seja $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Dado $\bar{b} \in \mathbb{R}^m$ queremos achar o "melhor" $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\bar{b} - A\bar{x}$ tenha o menor erro de aproximação possível, i.e. $\|\bar{b} - A\bar{x}\| \leq \|\bar{b} - Ax\|$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

- O conjunto dos $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ que possuem o menor erro possível é dado pelo conjunto solução do sistema linear

$$A^T A\bar{x} = A^T\bar{b}.$$

Dita equação é chamada de *equação normal*. O melhor valor que aproxima $\bar{b}$ é $A\bar{x}$. Se A^TA fosse invertível, temos que $\bar{x} = (A^TA)^{-1}A^T\bar{b}$.

(b) Dado $\bar{b} \in \mathbb{R}^m$ e um subespaço vetorial Y de $\mathbb{R}^m$, queremos achar o "melhor" $\bar{y} \in Y$ tal que $\bar{b} - \bar{y}$ tenha o menor erro de aproximação possível, i.e. $\|\bar{b} - \bar{y}\| \leq \|\bar{b} - y\|$ para todo $y \in Y$. Para isso, encontre uma matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, tal que $Y = \{Ax : x \in \mathbb{R}^n\}$ e logo use o item (a). Melhores matrizes são aquelas com n pequeno.

30. Projete o vetor $\bar{b} = (b_1, \ldots, b_m)$ na reta que passa por $\bar{a} = (1, \ldots, 1)$. Resolva esse problema revolvendo m equações $\bar{a}\bar{x} = \bar{b}$ em um incógnita (por meio dos mínimos quadrados)
    (a) Resolva $\bar{a}^t\bar{a}\bar{x} = \bar{a}^T\bar{b}$, para mostrar que a solução $\hat{x}$ é a *média aritmética* dos $b's$
    (b) Encontre $e := \bar{b} - \bar{a}^T\hat{x}$, calcule $\|e\|^2$ (*a variância*) e $\|e\|$ (*desvio padrão*).

31. Encontre a solução de mínimos quadráticos para cada um dos sistemas a seguir

$$(a) \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 = 2 \\ -x_1 - 2x_2 = 1 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} -x_1 + x_2 = 10 \\ 2x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 - 2x_2 = 20 \end{cases}$$

e

$$(c)\quad \begin{cases} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ & - & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & & & + & x_3 & = & 2 \end{cases}$$

Resposta:

(a) $\{(1,0)^T + \beta(-2,1) : \beta \in \mathbb{R}\}$;

(b) $\{(19/7, -26/7)^T\}$; (c) $\{(11/15, 16/15, 9/15)^T\}$.

32. Para cada um dos sistemas $A\bar{x} = \bar{b}$ a seguir, encontre todas a soluções de mínimos quadráticos

$$(a)\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(b)\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Resposta:

(a) $\{(1-2\beta, \beta)^T : \beta \in \mathbb{R}\}$; (b) $\{(2-2\beta, 1-\beta, \beta)^T : \beta \in \mathbb{R}\}$;

Aplicações na identificação de Cônicas: Uma equação quadrática nas variáveis x e y tem a seguinte forma: $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, onde $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ é a, b e c não são todos nulos. Usando matrizes podemos escrever essa equação como:

$$(x \quad y)^T \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (d \quad e)^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + f = 0,$$

Agora, encontre uma matriz Q ortonormal (i.e. $Q^{-1} = Q^T$) e D diagonal, talque

$$\begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix} = Q^{-1}DQ, \text{ onde } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Se isso for possível, escolha como novas coordenadas x' e y' definidas por

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Logo usamos as novas coordenadas x' e y', para re-escrever $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ como

$$(x' \quad y')^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + (d \quad e)^T Q^T \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + f = 0.$$

Apartir da última equação é fácil saber se é uma elipse, parábola ou hipérbole.

33. Para cada uns das equações a seguir, encontre uma mudança apropriada de coordenadas (isto é, uma rotação e/ou translação), de modo que a cônica resultante esteja em forma canônica, identifique a curva e esboçe seu grafico:

   (a) $x^2 + xy + y^2 = 6$

   (b) $3x^2 + 8xy + 3y^2 + 28 = 0$

   (c) $x^2 + 2xy + y^2 + 3x + y - 1 = 0$

   Resposta:

   (a) $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $(x')^2/4 + (y')^2/12 = 1$; elipse.

   (c) $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $(y' + \frac{\sqrt{2}}{2})^2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(x' - \sqrt{2})$ ou $(y'')^2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}x''$; parábola.