Lista 2: Otimização I

A. Ramos *

September 3, 2017

Abstract

Lista em constante atualização.

1. Convexidade (continuação)
2. Condições de otimalidade

1. Usando a noção de projeção *prove* as seguinte versões do teorema de separação de Hahn-Banach (Caso finito dimensional).

   Sejam K_1 e K_2 *conjuntos convexos não vazios* de $\mathbb{R}^n$ *com interseção vazia*, i.e. $K_1 \cap K_2 = \emptyset$.

   (a) Se $z \notin \text{cl}(K_1)$. Mostre que existe $a \in \mathbb{R}^n$, $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que $\langle a, z\rangle < \gamma \leq \langle a, x\rangle$, para todo $x \in K_1$.

   (b) *Existência de um hiperplano suporte.* Se $z \in \text{cl}(K_1) \setminus \text{int}(K_1)$. Mostre que existe $a \neq 0 \in \mathbb{R}^n$, $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que $\langle a, z\rangle \leq \gamma \leq \langle a, x\rangle$, para todo $x \in K_1$. *Dica:* Use o item anterior e a continuidade da projeção.

   (c) Se K_1 é compacto e K_2 é fechado. Prove que existe $a \in \mathbb{R}^n$, $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ tal que $\langle a, x\rangle < \gamma_1 < \gamma_2 < \langle a, y\rangle$, para todo $x \in K_1$ e $y \in K_2$.

2. (Lema de Farkas) Seja A uma matriz $m \times n$ e $c \in \mathbb{R}^n$. Então, exatamente uma das seguintes sistemas tem solução.

   (a) Existe x tal que $Ax \leq 0$, $c^T x > 0$.

   (b) Existe y tal que $A^T y = c$, $y \geq 0$.

   Dica: Use os teoremas de separação de Hahn-Banach.

3. (a) Seja $C \neq \emptyset$ um conjunto convexo fechado de $\mathbb{R}^n$ e $x^* \notin C$. Mostre que existe $p \neq 0$ tal que $p^T(x - x^*) \leq 0$, $\forall x \in C$.

   (b) Seja $C \neq \emptyset$ um conjunto convexo de $\mathbb{R}^n$ e $z \in \partial C$. Então, existe $n \neq 0$ tal que $\langle n, c - \bar{c}\rangle \leq 0$, $\forall c \in C$. Isto é, no caso finito-dimensional, o cone normal de C em um ponto da fronteira admite sempre um elemento não nulo.

4. (a) Seja K é um cone. Mostre que o cone K convexo se, e somente se $K + K \subset K$.

   (b) Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ um cone convexo. Prove que $M := K \cap -K$ é o maior subespaço linear contido em K, e que $K - K$ é o menor subespaço linear que contem K.

5. Seja $C \neq \emptyset \subset \mathbb{R}^n$. Mostre que $conv(C)$ é compacto se C é compacto. Forneça um exemplo em que $conv(C)$ não é fechado mesmo que C for fechado.

6. (a) Se $C_1 \subset C_2$. Mostre que $C_2^\circ \subset C_1^\circ$. Forneça um exemplo onde $C_2^\circ = C_1^\circ$ mas $C_2^\circ \neq C_1^\circ$.

   (b) Sejam C_1 e C_2 dois cones. Prove que $(C_1 + C_2)^\circ = C_1^\circ \cap C_2^\circ$

   (c) Se C_1 e C_2 são dois cones convexos fechados. $(C_1 \cap C_2)^\circ = cl(C_1^\circ + C_2^\circ)$

   (d) Seja A uma matriz real $m \times n$. Defina $C := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq 0\}$. Mostre que $C^\circ = \{A^T\lambda : \lambda \in \mathbb{R}^m, \lambda \geq 0\}$.

   (e) Prove que $[\text{Sym}_+^m(\mathbb{R})]^\circ = -\text{Sym}_+^m(\mathbb{R})$.

7. Seja $K \neq \emptyset$ um cone convexo. Prove que se $x \in \text{int}(K)$, então $\langle x, y\rangle < 0$ para todo $y \neq 0 \in K^\circ$.

8. Seja $\mathcal{V} := \{v_1, \ldots, v_m\}$ um conjunto de vetores em $\mathbb{R}^n$. Mostre que $\mathcal{V}$ é um conjunto afim independente [1] se, e somente se para todo $j = 1, \ldots, m$ os vetores $\{v_1 - v_j, \ldots, v_m - v_j\} \setminus \{0\}$ são linearmente independentes.

9. Prove o teorema de dualidade forte de Programação Linear, usando os teoremas de separação de Hahn-Banach.

10. Seja C um conjunto não vazio de $\mathbb{R}^n$. Defina

$$C^\infty := \{d \in \mathbb{R}^n : \exists \;\; x \in C, \text{ tal que } x + td \in C, \;\; \forall t \geq 0\}.$$

    O conjunto C^∞ é chamado de *cone de recessão*. Desenhe. Verifique o seguinte:

*Department of Mathematics, Federal University of Paraná, PR, Brazil. Email: `albertoramos@ufpr.br`.

[1] O conjunto $\mathcal{V} := \{v_1, \ldots, v_m\}$ é afim independente, se a única solução do sistema $\sum_{i=1}^m \alpha_i v_i = 0$, $\sum_{i=1}^m \alpha_i$ é a solução nula.

(a) Mostre que C^∞ é um cone não vazio. Se C é convexo, então temos que C^∞ é um cone convexo.
(b) Se C é convexo fechado. Verifique que $C^\infty = \{d \in \mathbb{R}^n : C + d \subset C\}$.
(c) Suponha que C é um conjunto convexo fechado. Prove que C é limitado se, e somente se $C^\infty = \{0\}$.

11. *Homogenização.* Seja $C \neq \emptyset$ um conjunto convexo em $\mathbb{R}^n$. Defina $\hat{C} := \{(x,1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \quad x \in C\}$ e $K(\hat{C}) := \{t(x,1), t > 0, x \in C\}$. O conjunto $K(\hat{C})$ é chamado de *homogenização* de C. Prove que $K(\hat{C})$ é um cone convexo e que $\mathrm{cl}\{K(\hat{C})\} = K(\hat{C}) \cup \{(d,0) : d \in C^\infty\}$.

12. Seja $f : U \to \mathbb{R}$ uma função convexa derivável no aberto convexo $U \subset \mathbb{R}^n$ e $x^* \in U$. Prove que

$$\mathrm{conv}\{y \in \mathbb{R}^n : y = \lim_{n\to\infty} \nabla f(x^n), \quad x^n \to x^*\}$$

é um convexo compacto.

13. *(Testes de convexidade usando derivadas).* Seja $f : E \to \mathbb{R}$ diferenciável, onde E é um espaço finito-dimensional (por exemplo, $E = \mathbb{R}^m$, $E = \mathrm{Sym}^m(\mathbb{R})$, .., etc). Então, f é (estritamente) convexa se, e somente se algumas das siguentes condições valem:
   (a) $f(y) \geq (>) f(x) + \langle \nabla f(x), y - x\rangle$, $\forall x, y$ (com $x \neq y$)
   (b) $\nabla f(x)$ é (estritamente) mononota. i.e. $\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y\rangle \geq (>) 0$, $\forall x, y$ (com $x \neq y$)
   (c) $\nabla^2 f(x) \geq (\succ) 0$, para todo x. (aqui assumimos que f é duas vezes diferenciável)
   (d) Dê um exemplo de uma função $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$ estritamente convexa tal que $f''(0) = 0$.
   (e) Seja $f(X) := -\ln\det(X)$, $X \in \mathrm{Sym}^m_{++}(\mathbb{R})$. Use o item (b), que $\nabla f(X) = -X^{-1}$ ($X \in \mathrm{Sym}^m_{++}(\mathbb{R})$) e que $\mathrm{tr}Z + \mathrm{tr}Z^{-1} \geq 2m$, $\forall Z \in \mathrm{Sym}^m_{++}(\mathbb{R})$ (com igualdade se, e somente se $Z = I$) para provar que $f(X) := -\ln\det(X)$ é estritamente convexa.

14. Determine a convexidade
   (a) $f(x,y) := xe^{-(x+y)}$, $\quad f(x,y,z) = x^2 + 3y^2 + 9z^2 - 2xy + 6yz + 2zx$
   (b) Mostre que $f(x) := g(Ax + a)$ é convexa, se g é convexa, A é uma matriz $m \times n$ e $a \in \mathbb{R}^m$
   (c) Prove que $f(x) = \theta(g(x))$ é (estritamente) convexa se g é (estritamente) convexa e θ é (estritamente) não decrescente.

15. Considere que $f : U \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^2, onde U é um aberto de $\mathbb{R}^n$. Suponha que f é uma função harmonica em U, isto é, $\Delta f(x) := \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f(x) = 0$, para todo $x \in U$. Prove que se x^* é um ponto critico de f e a Hessiana de f em x^* não é identicamente nulo. Então, x^* deve ser um ponto de sela.

16. (a) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1. Prove que se f tem um mínimo local que não é minimo global. Então, f deve ter um outro ponto critico.
   (b) Considere $f(x,y) := (xy - x - 1)^2 + (x^2 - 1)^2$. Prove que f tem dois mínimos locais.
   (c) Prove que $f(x,y) := x^3 - 3xe^y + e^{3y}$ tem um único critico ponto que é minimo local mas não é mínimo global. Compare com a item (a).

17. (*Condição suficiente para otimalidade*). Seja $f : U \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2, onde U é um aberto de $\mathbb{R}^n$. Se $x^* \in U$ é um ponto crítico e $\nabla^2 f(x^*)$ é definida positiva. Então, x^* é um minimo local *estrito* de f em U.

18. Considere o problema de minimização de uma função diferenciável sobre um espaço afim.

$$\min \quad f(x) \quad \text{sujeito a} \quad Ax = b,$$

onde $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, A é matriz $m \times n$ e $b \in \mathbb{R}^m$. Se x^* é um minimizador local então $\mathrm{proj}_{N(A)} \nabla f(x^*) = 0$.

19. Seja A uma matriz quadrática $n \times n$, $b \in \mathbb{R}^n$ e considere o problema de quadrático

$$\min f(x) := \frac{1}{2}\langle x, Ax\rangle + \langle b, x\rangle \quad \text{sujeito a} \quad x \geq 0$$

Se x^* minimizador local deste problema quadrático, mostre que $Ax^* + b \geq 0$, $x^* \geq 0$ e $\langle Ax^* + b, x^*\rangle = 0$. Ainda mais, prove que essas condições são suficiente para a otimalidade se A é definida positiva.

20. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função convexa derivável, $C \in \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo fechado, e $t \geq 0$. Prove que $x^* \in C$ é solução do problema $\min f(x)$ sujeito a $x \in C$ se, e somente se $x^* = \mathrm{proj}_C(x^* - t\nabla f(x^*))$.

21. Seja $\{e^1, \ldots, e^n\}$ a base canonica de $\mathbb{R}^n$ e considere o problema do elipsoide de volume minimo

$$\min \; -\ln\det(X) \quad \text{s.a} \quad \|Xe^i\| \leq 1, \forall i = 1, \ldots, n \quad \text{e} \quad X \in \mathrm{Sym}^n_{++}(\mathbb{R}).$$

   (a) Prove que o problema admite solução.
   (b) Use as condições de otimalidade de primeira ordem para mostrar que $X = I$ é a única solução de dito problema. *Dica:* Veja exercício 11 (e).
   (c) Deduza a *desigualdade de Hadamard*, i.e. $\det(x^1 x^2 \ldots x^n) \leq \|x^1\|\|x^2\| \ldots \|x^n\|$ para qualquer matriz $(x^1 x^2 \ldots x^n) \in \mathrm{Sym}^n_{++}(\mathbb{R})$.