CM005 Álgebra Linear
Lista 2

Alberto Ramos

1. Seja $M \in M_n(\mathbb{R})$ uma matriz. Mostre que se $\{v_1, \ldots, v_p\} \in \mathbb{R}^n$ é linearmente dependente, então $\{Mv_1, \ldots, Mv_p\}$ é também linearmente dependente.

   Agora suponha que M é invertível. Então, se $\{v_1, \ldots, v_p\} \in \mathbb{R}^n$ é linearmente independente, então $\{Mv_1, \ldots, Mv_p\}$ é linearmente independente.

2. Calcule o posto para cada uma das seguintes matrizes. Também, encontre bases para $lin(A)$ (espaço-linha de A), $col(A)$ (espaço-columa) e para $Nuc(A)$ (núcleo de A).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

3. Ache todos os valores possíveis para $posto(A)$ em função dos valores de α.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ -2 & 4\alpha & 2 \\ \alpha & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 6 & 6 & -4 \\ -2 & -1 & \alpha \\ \alpha & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

   Conhecendo o $posto(A)$, calcule a nulidade de cada matrix, i.e., $dim(Nuc(A))$.

4. Uma matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ tem posto 1, se e somente se $A = uv^T$ para algum $u \in \mathbb{R}^m$, $v \in \mathbb{R}^n$.

5. Calcule a dimensão e ache uma base para os seguintes espaços vetoriais.

   (a) $S := \{(3a + 4b - 4c, 4a - 8b - 12c, -2a - 4b + 2c) : a, b, c \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$

   (b) $S := \text{span}\{(1, -2, 1), (1, -2, 1), (0, 1, -1), (1, -1, 0), (0, -1, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$

   (c) $S := \text{span}\{f_1(x) = 3x, f_2(x) = |x|\}$ como subconjunto de $C[-1, 0]$

   (d) $S := \text{span}\{f_1(x) = 3x, f_2(x) = |x|\}$ como subconjunto de $C[-1, 1]$.
   Dica: As respostas são diferentes. Faça um esboço das funções

6. Em $\mathbb{R}^2$, verifique que a matriz que transforma $(1,0)$ em $(\cos(\theta), \sin(\theta))$ e $(0,1)$ em $(-\sin(\theta), \cos(\theta))$ é dada por
$$Q_\theta := \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$
Mostre que $Q_\theta Q_\phi = Q_{\theta+\phi}$, $Q_\theta^{-1} = Q_{-\theta}$.

7. Seja $\bar{a} \neq \bar{0} \in \mathbb{R}^n$. Considere a transformação $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, definido como $T(\bar{x}) = \bar{x} + \bar{a}$. Esse tipo de transformação é chamada de *translação*. Mostre que a translação não é uma transformação linear. Descreve geometricamente o efeito de uma translação. O que acontece se $\bar{a} = \bar{0}$.

8. Para as seguintes transformações (de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$) responda quais delas são tranformações lineares e quais são invertíveis. Caso seja possível, calcule a inversa.
(a) $T(x) = x^3$, (b) $T(x) = x + 1$, (c) $T(x) = exp(x)$, (d) $T(x) = 3x$.

9. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear para o qual sabemos que $T(1,1) = (3,-2)$ e $T(3,4) = (1,2)$.
   (a) Determine $T(2,4)$
   (b) Determine $T(a,b)$ para $(a,b) \in \mathbb{R}^2$
   (c) Calcule o $ker(T)$.

10. Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e considere $T_\alpha : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear para o qual sabemos que $T_\alpha(1,1,0,0) = (\alpha+1, 0, \alpha+1)$, $T_\alpha(1,0,1,1) = (2\alpha + 2, 4\alpha+4, 0)$, $T_\alpha(1,0,0,2) = (3\alpha, 6, 3)$ e $T_\alpha(0,0,0,3) = (3\alpha, 6, 3)$.
    (a) Determine $T_\alpha(4,2,1,6)$ e $T_\alpha(1,1,-1,3)$.
    (b) Calcule o $ker(T_\alpha)$ em função de α
    (c) Ache uma base para $Im(T_\alpha)$, em função de α.

11. Seja $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.
    (a) Mostre que $Nuc(A^T A) = Nuc(A)$.
    (b) Verifique que $posto(A^T A) = posto(A)$
    (c) Mostre que se $A^T A$ é invertível, então as colunas de A são linearmente independente.

    Dica: Lembre que $v^T v = v \cdot v = \|v\|^2$ e $(Av)^T = v^T A^T$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$, onde $\|v\|$ é a norma do vetor v

12. Mostre que
    (a) As funções $f_1(x) = \exp(\lambda_1 x)$, $f_2(x) = \exp(\lambda_2 x)$, $\ldots$, $f_k(x) = \exp(\lambda_k x)$, onde $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ são linearmente independente se, e somente se, $\lambda_i \neq \lambda_j$ para todo $i \neq j$.

(b) As funções $f_1(x) = x\exp(\lambda x)$, $f_2(x) = x^2\exp(\lambda x)$, $\ldots$, $f_k(x) = x^k\exp(\lambda x)$, com $\lambda \in \mathbb{R}$ são linearmente independente.

Dica: Use o wronskiano.

13. Sejam $\bar{u}_1 = (1\ \ 1\ \ 0)^T$, $\bar{u}_2 = (1\ \ 0\ \ 1)^T$ e $\bar{u}_3 = (0\ \ 1\ \ 1)^T$. Considere a transformação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida como

$$T(x_1, x_2) := x_2\bar{u}_1 + x_1\bar{u}_2 + (x_1 - x_2)\bar{u}_3.$$

(a) Mostre que T é uma transformação linear.

(b) Encontre a matriz associada a T em relação às bases ordenadas $\{e_1, e_2\}$ e $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$.

(c) Encontre a matriz associada a T em relação a base ordenada $\{e_1, e_2\}$ e a base canônica de $\mathbb{R}^3$. *Dica: Para simplificar as contas use mudanças de bases.*

14. Considere as bases ordenadas de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ e $\mathcal{F} = \{\bar{w}_1, \bar{w}_2\}$, onde

$$\bar{v}_1 = (1\ \ 0\ \ -1)^T,\quad \bar{v}_2 = (1\ \ 2\ \ 1)^T,\quad \bar{v}_3 = (-1\ \ 1\ \ 1)^T$$

e

$$\bar{w}_1 = (1\ \ -1)^T,\quad \bar{w}_2 = (2\ \ -1)^T.$$

Para cada uma das transformações lineares $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a seguir, encontre a matriz associada em relação às bases ordenadas $\mathcal{B}$ e $\mathcal{F}$.

(a) $T(x_1, x_2, x_3) = (x_3\ \ 2x_1)^T$,

(b) $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2\ \ x_1 - 2x_3)^T$,

(c) $T(x_1, x_2, x_3) = (2x_2\ \ -2x_1)^T$.

15. Seja $S = \mathrm{span}\{\exp(x), x\exp(x), x^2\exp(x)\}$. Seja $D : S \to S$ o operador S, i.e., $D(f) = f'$. Encontre a matriz associada de D em relação à base ordenada $\{\exp(x), x\exp(x), x^2\exp(x)\}$.

16. Seja $\mathcal{P}_n$ o conjunto dos polinômios de degrau $\leq n$.

Considere a transformação linear $D : \mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_1$, definida como $D(p) = p'$ (a derivada de p).

(a) Verifique que $\mathcal{B} = \{1 + x, 1 - x\}$ é uma base para $\mathcal{P}_1$.

(b) Calcule a matriz associada a T, $[T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$.

17. Seja $\mathcal{P}_n$ o conjunto dos polinômios de degrau $\leq n$.

Considere a transformação $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$, definida como

$$T(p) = xp'(x) + p''(x),\ \text{para todo}\ p \in \mathcal{P}_2,$$

onde p' é a derivada de p e p'' é a derivada de p'.

(a) Verifique que T é uma transformação linear.

(b) Encontre a matriz que representa T com relação a $\mathcal{B} := \{1, x, x^2\}$

(c) Encontre a matriz que representa T com relação a $\mathcal{C} := \{1, x, 1 + x^2\}$

(d) Encontre a matriz S, tal que $[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = S^{-1}[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} S$.

(e) Se $p(x) = 3x^2 + 2x + 1$, calcule $T^{30}(p)$.

18. Considere a transformação linear $T : V \to W$.

    Verifique que $ker(T) := \{v \in V : T(v) = 0\} \subset V$ e $ImT := T(V) \subset W$ são subespaços vetoriais de V e W respectivamente.

19. Seja $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^6$ uma transformação linear.

    (a) Se $dim(Ker(T)) = 3$ e T é sobrejetiva, qual é o valor de m?

    (b) Se T é injetiva e sobrejetiva, qual é o valor de m?

    (c) Suponha que $m = 5$, e que a $dimKer(T) = 3$, qual é a dimensão da $Im(T)$?

20. Forneça exemplos de transformações lineares $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ tais que

    (a) $Ker(T) = \{\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 = -x_3\}$.

    (b) $Im(T) = \{\bar{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1 = -y_2\}$.

    Para ambos casos, calcule $dim(Ker(T))$ e $dim(Im(T))$.

    Mostre que nenhuma transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ pode ser injetiva. Dê exemplo de transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ sobrejetiva.

21. Seja $T : V \to W$ uma transformação linear entre dois espaços vetoriais de dimensão finita.

    (a) Mostre que T é injetiva se e somente se T leva conjuntos l.i em conjuntos l.i.
    (i.e. se $\{v_1, \ldots, v_p\}$ é l.i. então $\{T(v_1), \ldots, T(v_p)\}$ é l.i.)

    (b) Mostre que T é sobrejetiva se e somente se T leva conjunto geradores de V em conjuntos geradores de W.
    (i.e. se $\{v_1, \ldots, v_p\}$ gera V então $\{T(v_1), \ldots, T(v_p)\}$ gera W)

    Use os itens anteriores para:

    I Seja o plano $\mathcal{P} : ax + by + cz = 0$. Verifique a projeção ortogonal π de $\mathbb{R}^3$ sobre o plano é sobrejetiva.

    II Verificar que $T : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$, definida como $T(p) = p + p'$ é injetora. Ainda mais, T é também sobrejetiva.

22. Seja T uma transformação linear, cuja matriz associada às bases $\mathcal{B}_V$ e $\mathcal{B}_W$ é
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \\ 4 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

   (a) Verifique que T não é injetora nem sobrejetiva.

   (b) Determine o $Ker(T)$ usando as coordenadas associadas a $\mathcal{B}_V$.

   (c) Calcule $dim(Im(T))$.

23. Temos que

   (a) Uma matriz quadrada $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ é *diagonalizável* se existe uma matriz S invertível e uma matriz diagonal D tal que $A = S^{-1}DS$.

   (b) Uma transformação linear $T : V \to V$, onde V tem dimensão finita, é *diagonalizável* se existe uma base $\mathcal{B}$ de V, tal que a matriz $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ é diagonalizável.

   (c) Seja $T : V \to V$ uma transformação linear. Se $Tv = \lambda v$ que λ é um autovalor se λ é raíz do polinômio $p(\lambda) := det(A - \lambda I)$. Se v satisfaz que $Av = \lambda v$, dizemos que v é um autovetor de A associado a λ.

   (d) *Teorema:* Uma transformação linear $T : V \to V$, com $dim(V) = n$ é diagonalizável se, e somente se, ele possui n autovetores linearmente independentes.

   Isto é, T é diagonalizável se, e somente se, o espaço V tem uma base formada de autovetores de T.

   (e) Uma condição suficiente para ser diagonalizável é que todos os autovalores de T sejam diferentes.

   Com essa informação:

   (a) Verifique quais das matrizes são diagonalizáveis
$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} (\ \alpha \in \mathbb{R})$$