Lista 1: Geometria Analítica

A. Ramos *

16 de março de 2017

Resumo

Lista em constante atualização.

1. Vetores (no plano e no espaço);
2. Sistema de coordenadas;
3. Ângulo entre vetores, produto escalar.

1 Vetores e sistemas de coordenadas

1. Considere B e C dois pontos distintos. Se M é o ponto médio do segmento BC, mostre que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM}$, para qualquer ponto A.

2. Encontre a origem (ponto inicial) e a extremidade (ponto final) de um representante do vetor $\overrightarrow{FB} - \overrightarrow{GC} - \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{BC}$.

3. Sejam $A = (-, 1)$ e $B = (3, 1)$ dois vértices de um triângulo equilátero. Qual a coordenada do terceiro vértice? *Rpta:* Há duas possivéis respostas, uma delas é $C = (1, 1 - 2\sqrt{3})$.

4. Considere dois vetores $U = (2, -1)$ e $V = (3, -3)$ no plano. Qual é o ponto inicial de um representante do vetor $W = 2U - 4V$ cuja extremidade é $(5, 5)$.

5. Mostre analiticamente e graficamente que existem números α e β tais que $X = \alpha U + \beta V$ onde
   - $U = (5, 1)$, $V = (3, 5)$, $X = (5, 4)$
   - $U = (2, -1)$, $V = (3, 2)$, $X = (5, 2)$

6. Mostre que o segmento que une os pontos médios das diagonais de um trapézio é paralelo à base do trapézio e tem a metade da sua medida.

7. Considere os pontos $A = (-5, 0)$, $B = (0, 2)$ e $C = (0, -2)$. Mostre que esses pontos são os vértices de um triângulo isósceles. Qual é a area desse triângulo? (*Rpta:*) $10u^2$.

8. Mostre que se $\alpha V = \vec{0}$, então $\alpha = 0$ ou $V = 0$. Agora, responda as seguinte questões:
   (a) Se $\alpha V = \beta V$, então $\alpha = \beta$? e se $V \neq \vec{0}$?
   (b) Se $\alpha V = \alpha U$, então $U = V$? E se $\alpha \neq 0$?

9. Quais são as coordenadas do ponto $P^{'}$, simétrico do ponto $P = (2, 0, 6)$ em relação ao ponto $M = (2, 4, -1)$?

10. Considere os ponto $A = (1, -2, -3)$, $B = (-5, 2, -1)$ e $C = (4, 0, 1)$. Encontre o ponto D tal que A, B, C e D sejam os vértices consecutivos de um paralelogramo.

*Department of Mathematics, Federal University of Paraná, PR, Brazil. Email: `albertoramos@ufpr.br`.

11. Quais dos seguintes vetores são paralelos $U = (6, -4, -2)$, $V = (3, -2, -1)$, $W = (-15, 10, -5)$?

12. Considere um quadrado com lado igual a $2a$ cujo centro (interseção das diagonais) está na origem e seus lados são paralelos ao eixos coordenados. Encontre as coordenadas de todos os vértices. *Rpta*: Um vértice é $(-a, a)$.

2 Produto escalar e o ângulo entre vetores

Em geral, considere dois vetores $U = (u_1, \dots, u_n)$ e $V = (v_1, \dots, v_n)$ em $\mathbb{R}^n$. O *produto escalar* de U e V, denotado por $U.V$ é o *número* definido como

$$U.V = v_1u_1 + v_2u_2 + \cdots + v_nu_n$$

Usando o produto interno podemos calcular o ângulo θ entre dos vetores, atraves da formula

$$U.V = \|U\|\|V\| \cos(\theta).$$

Muita vezes, também é usada a notação $\langle U, V \rangle$ para se referir ao produto interno.

Temos as seguintes propriedades (algumas):

- O comprimento (norma) de um vetor V é a raiz quadrada de $V.V$, isto é, $\|V\| := \sqrt{V.V}$.
- Desigualdade de Cauchy-Schwarz: Para qualquer par de vetores U e V, sempre vale que $|U.V| \leq \|U\|\|V\|$. Ainda mais, se $|U.V| = \|U\|\|V\|$, então U deve ser multiplo de V, isto é, $U = \alpha V$ para algum $\alpha \in \mathbb{R}$.
- Temos a seguinte igualdade:
$$\|U \pm V\|^2 = \|U\|^2 + \|V\|^2 \pm 2U.V$$
- U e V são perpendiculares se, e somente se $U.V = 0$

Com essas informações responda os seguintes exercícios.

1. Verifique que $V = (1, 0, 1)$ é perpendicular a $U = (2, 1, -2)$. Faça um esboço.

2. Qual o ângulo entre os vetores

   $(1) U = (\cos(\theta), \sin(\theta)), V = (1, 0)$ $(2) U = (\cos(\theta), \sin(\theta)), V = (0, 1)$ $(3) U = (\cos(\theta), \sin(\theta)), V = (-\cos(\theta), \sin(\theta))$.

   Faça um esboço.

3. Ache o ângulo entre os vetores

$$(1) \;\; 2\vec{i} + 2\vec{j}, \quad \vec{i} + \vec{k} \;\; (2) \;\; \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}, \quad -3\vec{j} - 3\vec{k}$$

4. Determine o valor de α para o qual os vetores $V = (\alpha, 3, 4)$ e $U = (3, 1, 2)$ são perpendiculares

5. Mostre que não existe α tal que os vetores $V = 2\alpha\vec{i} + 4\vec{j} + 8\vec{k}$ e $U = -\alpha\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$. são perpendiculares

6. Em $\mathbb{R}^3$, seja $O = (0, 0, 0)$. Qual o lugar geométrico dos pontos $P = (x, y, z)$ tal que $\|\overrightarrow{OP}\|^2 = 4$? Qual é a figura representada pela equação $x^2 + y^2 = 4$ em $\mathbb{R}^3$? É em $\mathbb{R}^2$?

7. Considere $V = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ e $U = -2\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$. Determine os vetores unitários paralelos aos vetores (1) $U - V$; (2) $2U - 3V$; (3) $U + V$.

8. Ache o vetor unitário da bissetriz do ângulo entre os vetores $V = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ e $U = 6\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$.

9. Mostre que os pontos $A = (3, 0, 2)$, $B = (4, 3, 0)$ e $C = (8, 1, -1)$ são vértices de um triângulo retângulo. Em qual dos vértices se encontra o ângulo reto?

10. Responda:

    (a) Se $V.W = U.W$ e $W \neq \vec{0}$. Então, $V = U$? Agora, suponha que os vetores V, W, U estão num plano, o que podemos dizer acerca V e U.

    (b) Se V é ortogonal a U_1 e U_2. Então, V é ortogonal a qualquer combinação linear de U_1 e U_2?

11. Mostre que se as diagonais de um paralelogramo tem o mesmo comprimento então ele é um retângulo.

12. Qual é a equação da reta no plano que é perpendicular ao vetor $\mathcal{N} = (2, 3)$ e passa pelo ponto $A = (-3, -3)$?

13. Encontre o vetor $\overrightarrow{CE}$ da seguinte figura, se o segmento CD tem comprimento 4, o segmento ED tem comprimento 3, $\angle(DC, DE) = 90°$ e $\angle(AB, AO) = 90°$.