Prova substitutiva: Análise II

27 de junho de 2017

Nome: ____

Responda: Qual prova vai ser substituída? ◯ P1 ◯ P2 ◯ P3

Questões relativas à Prova 1

Questão 1 .... $\boxed{0}$

Enuncie e prove o Teorema Fundamental do Cálculo.

Questão 2 .... $\boxed{0}$

Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua. Se $\displaystyle\int_a^b |f(x)|dx = 0$, então $f(x) = 0$ para todo $x \in [a,b]$.

Questão 3 .... $\boxed{0}$

Sejam $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integráveis e defina $\mathcal{C} := \{x \in [a,b] : f(x) \neq g(x)\}$. Mostre que se $\mathcal{C}$ tem medida nula, as integrais $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ e $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ coincidem.

Questão 4 .... $\boxed{0}$

Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continuamente derivável. Então:

(a) Se $a_n := \displaystyle\int_a^b f(x)\sin(nx)dx$, então $a_n \to 0$.

(b) Se $b_n := n\displaystyle\int_a^b |f(x)|^n dx$ e $|f(x)| < r < 1$, $\forall x \in [a,b]$. Então $b_n \to 0$.

Questão 5 .... $\boxed{0}$

Analise a convergência das integrais impróprias.

(a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}dx$

(b) $\displaystyle\int_3^\infty \frac{(ln(x))^5}{x^{4/3}}dx$,

Questões relativas à Prova 2

Questão 1 .... $\boxed{0}$

Seja $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma sequência de funções dertiváveis. Assuma que

1. A sequência f_n' converge uniformemente a uma função g
2. Existe um número $c \in [a,b]$, tal que $\{f_n(c)\}$ converge
3. Todas as derivadas f_n' são funções contínuas.

Então, f_n converge uniformente para uma função f derivável com $f' = g$. *Dica: Use o teorema fundamental do cálculo.*

Questão 2 .... $\boxed{0}$

Verifique se as seguintes séries de funções convergem uniformente no conjunto $\mathcal{X}$.

(a) $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} (x^2 + n^2)^{-1}x$, $\mathcal{X} = \mathbb{R}$

(b) $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} \sqrt{k}\sin(\frac{x}{k^2})$, $\mathcal{X} = [-a,a]$ (com $a > 0$).

Questão 3 .... $\boxed{0}$

Prove que

(a) $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

(b) $\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^n$, para todo $x \in (-1, 1]$.

Questão 4 .... $\boxed{0}$

Defina

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \Big(1 - \cos(\frac{x}{n})\Big).$$

Mostre que f é de classe C^1 e calcule sua derivada.

Questão 5 .... $\boxed{0}$

Seja $\sum_{k \in \mathbb{N}} a_k x^k$ uma série de potência. Suponha que existem $c, M > 0$ tais que $|a_k c^k| \leq M$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Prove que o intervalo $(-c, c)$ está contido no intervalo de convergência da série considerada.

Questões relativas à Prova 3

Questão 1 .... $\boxed{0}$

Seja $\{f_n\}$ uma sequência equicontinua tal que $|f_n(x)| \leq M$, $\forall x \in K$, $\forall n \in \mathbb{N}$ onde K é um compacto de $\mathbb{R}$. Suponha que toda sequência uniformente convergente de $\{f_n\}$ tem o mesmo limite $f : K \to \mathbb{R}$. Mostre que $f_n \xrightarrow{u} f$ em K.

Questão 2 .... $\boxed{0}$

Calcule a série de Fourier das seguintes funções definidas em $[-\pi, \pi)$.

1. $f(x) = e^{ax}$ para $x \in [-\pi, \pi)$, (com $a \neq 0$);
2. $f(x) = |x|$ para $x \in [-\pi, \pi)$.

Questão 3 .... $\boxed{0}$

Seja $\mathcal{C}^2[a, b]$ o conjunto das funções com segunda derivada contínua em $[a, b]$. Para cada $f \in \mathcal{C}^2[a, b]$, defina o funcional $\phi_f(x) := \int_a^x f^2(t)dt + \int_a^x (f')^2(t)dt$, para $x \in [a, b]$. Dado $M > 0$, considere o conjunto

$$\mathbb{E}(M) := \{\phi_f : [a, b] \to \mathbb{R} : f \in \mathcal{C}^2[a, b], |f(x)| \leq M, |f'(x)| \leq M, |f''(x)| \leq M\}.$$

Mostre que dada uma sequência de funções $\{\psi_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{E}(M)$ é possível extrair uma subsequencia uniformemente convergente em $[a, b]$.

Questão 4 .... $\boxed{0}$

Mostre que não existem polinômios tal que $p_n \xrightarrow{u} f$ em $\mathbb{R}$, onde (1) $f(x) = \sin(x)$, (2) $f(x) = e^x$.

Questão 5 .... $\boxed{0}$

Desenvolva as seguintes funções em séries de potência em torno da origem, *cada passo deve ser corretamente justificado* e indique o intervalo de convergência.

1. $f(x) = x^2 e^x$
2. $f(x) = e^{-x}\cos(x)$
3. $f(x) = \int_0^x (\sin(t)/t)dt$