Analise II: Prova 3

27 de junho de 2017

Nome: ______________________________

Q:	1	2	3	4	5	Total
P:	20	20	20	20	20	100
N:						

Orientações gerais
1) As soluções devem conter o desenvolvimento e ou justificativa.
Questões sem justificativa ou sem raciocínio lógico coerente não pontuam.
2) A interpretação das questões é parte importante do processo de avaliação.
Organização e capricho também serão avaliados.
3) Não é permitido a consulta nem a comunicação entre alunos.

Questão 1 .... $\boxed{20}$

Seja $\mathcal{E}$ uma familia de funções $f : K \to \mathbb{R}$, com $K \subset \mathbb{R}$ compacto. Considere os enunciados:

1. Toda sequência em $\mathcal{E}$ tem uma subsequência uniformente convergente em $\mathcal{E}$;
2. $\mathcal{E}$ é equicontínua e uniformemente limitada .

Prove que (1) implica (2).

Questão 2 .... $\boxed{20}$

Calcule a série de Fourier das seguintes funções definidas em $[-\pi, \pi)$.

1. $f(x) = a$, se $x \in [-\pi, 0)$ e $f(x) = b$ se $x \in [0, \pi)$;
2. $f(x) = x$ para $x \in [-\pi, \pi)$.

Questão 3 .... $\boxed{20}$

Seja $\mathcal{C}[a, b]$ o conjunto das funções contínuas em $[a, b]$. Para cada $f \in \mathcal{C}[a, b]$, defina a seguinte função $\phi_f(x) := \displaystyle\int_a^x f(t)dt$, para $x \in [a, b]$.

Dado M um número estritamente positivo, considere o conjunto

$$\mathbb{E}(M) := \{\phi_f : [a, b] \to \mathbb{R} : f \in \mathcal{C}[a, b], f \geq 0, |f(x)| \leq M\}.$$

Mostre que dada uma sequência de funções $\{\psi_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{E}(M)$ é possível extrair uma subsequencia uniformemente convergente em $[a, b]$.

Questão 4 .... $\boxed{20}$

Seja f uma função contínua em $[a, b]$ tal que $\displaystyle\int_a^b f(x)p(x)dx = 0$ para todo polinômio. Mostre que f dever ser a função nula.

Questão 5 .... $\boxed{20}$

Usando derivação e integração termo a termo, calcule as somas das séries de potências abaixo (*cada passo deve ser corretamente justificado).*

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$

2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} kx^k$

3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} kx^{2k}$