Analise II: Prova 2

25 de maio de 2017

Orientações gerais
1) As soluções devem conter o desenvolvimento e ou justificativa. Questões sem justificativa ou sem raciocínio lógico coerente não pontuam.
2) A interpretação das questões é parte importante do processo de avaliação. Organização e capricho também serão avaliados.
3) Não é permitido a consulta nem a comunicação entre alunos.

Questão 1 .... $\boxed{20}$

Enuncie e prove que o limite uniforme de funções integráveis é integrável e que a integral do limite é o limite das integrais.

Questão 2 .... $\boxed{20}$

Considere $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$. Mostre que f é contínua em $X = [a, \infty)$ $(a > 1)$. f é derivável?.

Solution: Já que $\frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n^a}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} < \infty$, do teste de Weierstrass, temos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ converge uniformemente, além disso, dita função é continua já que cada somando é contínuo. Para verificar que é derivável basta ver se $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{ln(n)}{n^x}$ converge uniformente em X. Para isso, use de novo o teste de Weierstrass junto com o critério do integral para $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{ln(n)}{n^a}$ (perceba que $ln(x)/x$ é decrescente).

Questão 3 .... $\boxed{20}$

Prove que

(a) (12 points) $\sin(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

(b) (8 points) $\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^n$, para todo $x \in (-1, 1]$.

Solution: Feito em aula. Usamos os resíduos que provêm da formula de Taylor para estimar as diferenças $|\log(1+x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} x^k|$ e $|\sin(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}|$, respectivamente e logo tomando limites quando n vai para o infinito.

Questão 4 .... $\boxed{20}$

Seja $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma sequência de funções, tal que para toda sequência convergente $x_n \in [a, b]$ tem-se $f_n(x_n) \to 0$. Mostre que f_n converge uniformemente para a função nula.

Solution: Por contradição, existe $\varepsilon > 0$ e uma sequência $x_n \in [a, b]$ tal que $|f_n(x_n)| \geq \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Já que $[a, b]$ é compacto, existe uma subsequência x_{n_k} convergente. Por hipótese, temos que $f_{n_k}(x_{n_k}) \to 0$, o que é uma contradição com $|f_n(x_n)| \geq \varepsilon$.

Questão 5 .... $\boxed{20}$

Calcule o intervalo de convergência da série

(a) (6 points) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, onde $a_n := \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

(b) (6 points) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^n} x^n$

(c) (8 points) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$. *Dica:* Lembre que $(1 + x^{-1}\alpha)^x \to e^{\alpha}$, quando $x \to \infty$.

Solution: Primeiro calculemos o raio de convergência para cada série de potência.

(a) De fato, $R^{-1} = \limsup(a_{n+1}/a_n) = 1$. Logo, temos o intervalo $(-1, 1)$. Analisemos os extremos. Se $x = 1$, $a_n x^n = a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \to \infty$ similarmente quando $x = -1$, $a_n x^n$ não converge a zero. Portanto, o intervalo de convergência é $(-1, 1)$.

(b) Como $R^{-1} = \limsup(a_n^{1/n}) = 1/4$. Logo, temos o intervalo $(-4, 4)$. Analisemos os extremos. Se $x = 4$, $a_n x^n = a_n = n \to \infty$ similarmente quando $x = -1$, $a_n x^n$ não converge a zero. Assim, o intervalo de convergência é $(-4, 4)$.

(c) Como $R^{-1} = \limsup(a_{n+1}/a_n) = e^{-1}$. Logo, temos o intervalo $(-e, e)$. Analisemos os extremos. Se $x = e$, $a_n x^n = a_n e^n = n!(e/n)^n \to \infty$. Para ver que $n!(e/n)^n \to \infty$, basta usar a formula de Stirling $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n! e^n}{(\sqrt{2\pi n}) n^n} = 1$. Analogamente, quando $x = -e$, $a_n x^n$ não converge a zero. Assim, o intervalo de convergência é $(-e, e)$.

Questão 6 .... $\boxed{10}$

Uma função de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ é *analítica* em um ponto $x = a$, se coincidir com sua série de Taylor ao redor de $x = a$ num intervalo $\mathcal{I}$ de a. Mostre que

(a) (5 points) Se f é analítica no ponto $x = a$ na vizinhança $\mathcal{I}$, então, f é analítica para todo $x \in \mathcal{I}$.

(b) (5 points) Prove que não existe função analítica $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\{a \in \mathbb{R} : f \text{ é analítica em } a\} = \mathbb{Q}$.

Solution: (a) Feito em aula; (b) Suponha que existe uma função f analitica tal que $\{a \in \mathbb{R} : f \text{ é analítica em } a\} = \mathbb{Q}$. Pegue $c \in \mathbb{Q}$. Do item (a), existe um $\delta > 0$ tal que f é analítica em $(c - \delta, c + \delta)$. Por hipótese, concluímos que $(c - \delta, c + \delta) \in \mathbb{Q}$, o que é uma contradição já que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ é denso.