CM 005 Álgebra Linear: Prova 2

27 de setembro de 2016

Orientações gerais
1) As soluções devem conter o desenvolvimento e ou justificativa. Questões sem justificativa ou sem raciocínio lógico coerente não pontuam.
2) A interpretação das questões é parte importante do processo de avaliação. Organização e capricho também serão avaliados.
3) Não é permitido a consulta nem a comunicação entre alunos.

Questão 1 40

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Considere a matriz A definida como

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & \alpha \end{pmatrix}$$

Em função do parâmetro α. Responda:

(a) (15 points) Qual é o posto da matriz A.

(b) (15 points) Encontre uma base para o espaço columa de A, $col(A)$.

(c) (10 points) Qual é a dimensão de $Nuc(A)$? *Dica: Não precisa calcular* $Nuc(A)$.

Solution: Para calcular o posto, primeiro devemos calcular uma forma escada reduzida da matriz A. Usamos o método de eliminação de Gauss, temos que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha - 2 \end{pmatrix}.$$

Dependendo do valor de alpha, a última linha pode ser nula ou não. Assim, temos os seguintes casos:

1. Se $\alpha \neq 2$. Nesse caso, podemos fazer um passo mais no método de Gauss, obtendo a seguinte matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Daqui temos que $posto(A) = 3$, uma base para o espaço coluna é

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \alpha \end{pmatrix} \right\}$$

e que a $dim(Nuc(A)) = 3 - posto(A) = 3 - 3 = 0$.

2. Se $\alpha = 2$. Nesse caso, a matriz em forma reduzida é

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daqui temos que $posto(A) = 2$, uma base para o espaço coluna é

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

e que a $dim(Nuc(A)) = 3 - posto(A) = 3 - 2 = 1$.

Questão 2 .... $\boxed{20}$

Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear para o qual sabemos que

$$T(1,1) = (3,-2), \quad T(3,4) = (1,2).$$

(a) (15 points) Determine $T(5,6)$

(b) (05 points) Determine $T(a,b)$ para $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Solution:

1. Como só sabemos como age T nos vetores $(1,1)^T$ e $(3,4)^T$, para calcular $T(5,6)$ devemos escrever $(5,6)^T$ as combinação linear de $(1,1)^T$ e $(3,4)^T$. Logo, se

$$\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix},$$

para algum α e β. Resolvendo o sistema temos que $\alpha = 2$ e $\beta = 1$. Logo,

$$T\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix} = T\left\{\alpha\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\right\} = \alpha T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \beta T\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\-2\end{pmatrix}.$$

2. Similarmente ao caso anterior, devemos escrever o vetor arbitrário $(a,b)^T$ como combinação linear de $(1,1)^T$ e $(3,4)^T$. Assim, se

$$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix},$$

para algum α e β, devemos ter que $\alpha = 4a - 3b$ e $\beta = b - a$. Portanto, Logo,

$$T\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = T\left\{\alpha\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\right\} = (4a-3b)\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix} + (b-a)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}11a-8b\\-10a+8b\end{pmatrix}.$$

Questão 3 .... $\boxed{30}$

Sejam os vetores

$$\bar{u}_1 = (1 \;\; 1 \;\; 0)^T, \quad \bar{u}_2 = (1 \;\; 0 \;\; 1)^T \quad \text{e} \quad \bar{u}_3 = (0 \;\; 1 \;\; 1)^T.$$

Considere a transformação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida como

$$T(x_1,x_2) := x_2\bar{u}_1 + x_1\bar{u}_2 + (x_1 - x_2)\bar{u}_3.$$

(a) (05 points) Verifique que $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$

(b) (20 points) Encontre a matriz associada a T em relação às bases ordenadas $\{e_1, e_2\}$ e $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$.

(c) (5 points) Ache a matriz associada a T em relação às base ordenadas $\{(1,1)^T, (1,-1)^T\}$ e $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$.

Solution:

1. Como temos três vetores $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$ num espaço de dimensão três, $\mathbb{R}^3$, para verificar que é uma base será suficiente ver que eles são l.i. Uma forma é saber se o determinante da matriz cujas colunas são $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$ e $\bar{u}_3$, é diferente de zero. Logo, como

$$det\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\end{pmatrix} = -2 \neq 0,$$

concluímos que $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$ são l.i. e portanto uma base de $\mathbb{R}^3$.

2. Precisamos achar as coordenadas de $T(e_1)$ e $T(e_2)$, em relação à base $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$. Como $e_1 = (1,0)^T$ e $e_2 = (0,1)^T$ temos que:

$$T(e_1) = T(1,0) = 0.\bar{u}_1 + 1.\bar{u}_2 + (1-0).\bar{u}_3 = 0.\bar{u}_1 + 1.\bar{u}_2 + 1.\bar{u}_3$$

e

$$T(e_2) = T(0,1) = 1.\bar{u}_1 + 0.\bar{u}_2 + (0-1).\bar{u}_3 = 1.\bar{u}_1 + 0.\bar{u}_2 - 1.\bar{u}_3.$$

Portanto, a matriz associada a T em relação às base ordenadas $\{e_1, e_2\}$ e $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$ é:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Ao igual que o item anterior, precisamos achar as coordenadas de $T(1,1)$ e $T(1,-1)$, em relação à base $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$. Existe várias formas. Nós calcularemos direitamente $T(1,1)$ e $T(1,-1)$. Assim,

$$T(1,1) = 1.\bar{u}_1 + 1.\bar{u}_2 + (1-1).\bar{u}_3 = 1.\bar{u}_1 + 1.\bar{u}_2 + 0.\bar{u}_3$$

e

$$T(1,-1) = -1.\bar{u}_1 + 1.\bar{u}_2 + (1-(-1)).\bar{u}_3 = -1.\bar{u}_1 + 1.\bar{u}_2 + 2.\bar{u}_3.$$

Portanto, a matriz associada a T em relação às base ordenadas $\{(1,1)^T, (1,-1)^T\}$ e $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$ é:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Questão 4 .... $\boxed{10}$

Considere

$$S = \operatorname{span}\{\exp(x), x\exp(x), x^2\exp(x)\}.$$

Seja $D : S \to S$ o operador derivada, i.e., $D(f) = f'$. Encontre a matriz associada de D em relação à base ordenada $\{\exp(x), x\exp(x), x^2\exp(x)\}$.

Solution: Para calcular a matriz precisamos achar as coordenadas de $D(\exp(x))$, $D(x\exp(x))$ e $D(x^2\exp(x))$, em relação à base $\{\exp(x), x\exp(x), x^2\exp(x)\}$. Assim,

$$D(\exp(x)) = \exp(x) = 1.\exp(x) + 0.x\exp(x) + 0.x^2\exp(x),$$

$$D(x\exp(x)) = \exp(x) + x\exp(x) = 1.\exp(x) + 1.x\exp(x) + 0.x^2\exp(x),$$

e

$$D(x^2\exp(x)) = 2x\exp(x) + x^2\exp(x) = 0.\exp(x) + 2.x\exp(x) + 1.x^2\exp(x).$$

Lembre que $\exp(x) = e^x$. Portanto, a matriz associada a D em relação à $\{\exp(x), x\exp(x), x^2\exp(x)\}$ é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Questão 5 .... $\boxed{10}$

Seja $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ tal que $Nuc(A) = Nuc(A^2)$. Então, mostre que $col(A) = col(A^2)$.

Solution: Primeiro note que como $Nuc(A) = Nuc(A^2)$, temos que $dim(Nuc(A)) = dim(Nuc(A^2))$. Então, usando o teorema fundamental da álgebra, temos que

$$dim(col(A^2)) = n - dim(Nuc(A^2)) = n - dim(Nuc(A)) = dim(col(A)).$$

Segundo, como $col(A^2) = \{A^2(\bar{x}) : \bar{x} \in \mathbb{R}^n\} \subset \{A(\bar{y}) : \bar{y} \in \mathbb{R}^n\} = col(A)$, concluímos que $col(A^2) \subset col(A)$. Em resumo, temos que $col(A^2)$ é um subespaço vetorial de $col(A)$ com a mesma dimensão que $col(A)$. Isso é suficiente para garantizar que $col(A^2) = col(A)$.