Lista 4: Analise II

A. Ramos *

17 de junho de 2017

Resumo

Lista em constante atualização.

1. Teorema de Weiestrass e teorema de Arzela-Áscoli;
2. Série de Fourier.

1. Mostre a identidade
$$\frac{x(1-x)}{n} = \sum_{k=0}^{n} x^k (1-x)^{n-k} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2,$$
para $x \in [0,1]$.

2. Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função continua. Se $\int_0^1 x^n f(x)dx = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $f(x) = 0$ para todo $x \in [0,1]$. Dê um contra-exemplo, quando f não for contínuo.

3. Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função continua. Usando o teorema de aproximação de Weiestrass, mostre que existem uma sequência de polinômios p_n tal que $\sum_n p_n = f$ em $[0,1]$.

4. Seja $\mathcal{P}_k$, o conjunto de polinômios de grau menor ou igual a k e I um intervalo compacto. Dado $M > 0$, defina $\mathcal{P}_k(I;M) := \{p \in \mathcal{P}_k : |p(x)| \leq M, \forall x \in I\}$. Prove que $\mathcal{P}_k(I;M)$ é equicontinuo.

5. Mostre que não existe polinômios p_n tal que $p_n \xrightarrow{u} f$ em $\mathbb{R}$, onde $f(x) = \sin(x)$ ou $f(x) = exp(x)$. Por que não existe contradição com o teorema de aproximação de Weirestrass ?

6. Defina $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ com $f(x) = 1/x$. Mostre que não existe sequência de polinômios $p_n \xrightarrow{u} f$ em $(0,1)$.

7. Considere a sequência $f_n(x) := nx^3$. Mostre que f_n possui derivadas limitadas no ponto $x = 0$, mas f_n não é equicontinua nesse mesmo ponto.

8. Seja $f : I \times [a,\infty) \to \mathbb{R}$ contínua e suponha também que $F(t) := \int_a^\infty f(t,x)dx$, para todo $t \in I$. Defina $F_n(t) := \int_a^n f(t,x)dx$, $t \in I$, $n \in \mathbb{N}$. Mostre que a integral $\int_a^\infty f(t,x)dx$ converge uniformemente em I se e somente se, se $\{F_n\}$ converge uniformemente para F em I.

9. Seja f_n uma sequência equicontínua e simplesmente limitada num compacto $K \subset \mathbb{R}$. Suponha que toda subsequência uniforme convergente em K tem o mesmo limite $f : K \to \mathbb{R}$. Então, f_n converge uniformemente a f em K.

10. Dê um exemplo de uma sequência equicontínua de funções $f_n : (0,1) \to (0,1)$ que não possua subsequência uniformemente convergente em $(0,1)$.

11. Considere uma sequência de funções $f_n : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. Suponha que (i) f_n converge a f em I; (ii) existe algum $a \in I$ tal que $\{f_n'(a)\}$ é limitada e (iii) $\{f_n''\}$ é uniformemente limitada em I. Mostre que f é de classe C^1. *Dica:* Use a equicontinuidade.

*Department of Mathematics, Federal University of Paraná, PR, Brazil. Email: `albertoramos@ufpr.br`.

12. Calcule a série de Fourier das seguintes funções definidas em $[-\pi, \pi)$ e calcule dita soma

    (a) $f(x) = a,\ \text{se } (-\pi \leq x < 0)$ e $f(x) = b,\ \text{se } (0 \leq x < \pi)$.
    (b) $f(x) = ax,\ \text{se } (-\pi \leq x < 0)$ e $f(x) = bx,\ \text{se } (0 \leq x < \pi)$.
    (c) $f(x) = |x|$ e $f(x) = \exp(\alpha x)$, $\alpha \neq 0$.
    (d) $f(x) = \sin^2(x)$ e $f(x) = ax + b$

13. Defina $f(x) = x$, se $0 \leq x < 2\pi$. Use o teorema de Parseval para concluir que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

14. Considere $\alpha \in (0, \pi)$. Defina

$$f(x) = 1,\ \text{se } |x| \leq \alpha \text{ e } f(x) = 0,\ \text{se } \alpha < |x| \leq \pi.$$

Além disso, defina $f(x + 2\pi) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

    (a) Calcule os coeficiente de Fourier de f
    (b) Mostre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\alpha)}{n} = \frac{\pi - \alpha}{2}, (0 < \alpha < \pi).$$

    (c) Usando o teorema de Parseval, prove que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2\alpha} = \frac{\pi - \alpha}{2}.$$

    (d) Faça α ir para zero e prove que

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = \frac{\pi}{2}.$$

15. Considere $f : [-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Suponha que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} n^k |a_n| = 0 \text{ e } \lim_{n\to\infty} n^k |b_n| = 0,$$

onde a_n e b_n são os coeficientes de Fourier da função f.

    (a) Mostre que f é de classe C^k
    (b) Prove que as derivadas $f^{(m)}$ (com $m \leq k$) é a derivada m-ésima da série de Fourier, com convergência uniforme da série resultante.

16. Sejam $f, g : [-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ funções de classe C^1 por partes. Se ambas funções possuem a mesma série de Fourier, então f e g são funções identicas.

17. Seja $a \in \mathbb{R}$ com $|a| < 1$. Encontre as funções cujas séries de Fourier são dadas por

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n \cos(nx)}{n}, \qquad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n \sin(nx)}{n}, \qquad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n!}$$