# Lista 5: Geometria Analítica

A. Ramos *

8 de junho de 2017

**Resumo**

**Lista em constante atualização**.

1. Equação da elipse;
2. Equação da hiperbóla.
3. Estudo unificado das cônicas não degeneradas.

## Elipse

Dado dois pontos $F_1$ e $F_2$ no plano, e dois números positivos $a$ e $c$ ($a > c$) com $dist(F_1, F_2) = 2c$. A elipse é definida como o seguinte conjunto

$$\mathcal{E} := \{P \in \mathbb{R}^2 : dist(P, F_1) + dist(P, F_2) = 2a\}.$$

Os pontos $F_1$ e $F_2$ são chamados de focos. Defina $b := \sqrt{a^2 - c^2}$. Observe que por definição de $b$, temos que $a^2 = b^2 + c^2$. O número $e := \frac{c}{a}$ é chamado de *excentricidade* da elipse.

1. **eixo focal (eixo transverso):** reta que contem os focos $F_1$ e $F_2$;
2. **vértices:** Interseção do eixo focal com a elipse. A interseção é dada por dois pontos, denotado $V_1$ e $V_2$;;
3. **centro :** Ponto meio do segmento $F_1F_2$;
4. **eixo normal (eixo conjugado):** reta perperndicular ao eixo focal que passa pelo centro;
5. **corda:** qualquer segmento de une dois pontos diferentes da elipse;
6. **corda focal:** corda que passa por algum foco;
7. **lado reto :** corda focal paralela à reta normal;
8. **raio vetor:** segmento de reta que une algum foco com algum ponto da parábola;
9. **diámetro:** corda que passsa pelo centro.
10. **eixo maior:** segmento $V_1V_2$. Observe que o eixo maior tem comprimento $2a$;
11. **eixo menor:** segmeto definido pela interseção da elipse com a reta normal. Note que o eixo menor tem medida $2b$ ;
12. **retas diretrizes:** retas paralelas à reta normal cuja distância ao centro $C$ é $a/e$.

*Department of Mathematics, Federal University of Paraná, PR, Brazil. Email: `albertoramos@ufpr.br`.

Observe que

$$dist(V_1, V_2) = 2a \ \ (\text{ eixo maior da elipse }), \quad dist(F_1, F_2) = 2c \ \ (\text{ distância focal }).$$

*Remark 1:* Note que a elipse é simetrica em relação ao eixo focal e também ao eixo normal.

*Remark 2:* Veja a construção geometrica da elipse na internet, por exemplo, `https://www.youtube.com/watch?v=RYV-uBWdb8Y`.

Usando um sistema de coordenadas a elipse $\mathcal{E}$ pode ser escrita com uma das seguintes formas.

**Forma canônica** (também chamada de forma reduzida) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ou $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$, onde o centro $C=(0,0)$ e o eixo focal é paralelo a algum dos eixos canônicos. *Desenhe ambas elipse explicitando o segmento que tem comprimento a e/ou b.*

Quando o centro $C=(h,k)$ e o eixo focal é paralelo a algum dos eixos canônicos, $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ ou $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$,

**Forma geral sem rotação** $x^2+y^2+Dy+Ex+F=0$. onde o eixo focal é paralelo a algum dos eixos canônicos.

**Forma geral mesmo** $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dy+Ex+F=0$ se $B^2-4AC<0$.

*Retas tangentes para a Elipse.* Em qualquer ponto sobre a elipse podemos calcular retas tangentes e retas normais.

**Quando** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. A reta tangente à $\mathcal{E}$ no ponto $P=(x_0,y_0)\in\mathcal{E}$ é dada por $r:(\frac{x_0}{a^2})x+(\frac{y_0}{b^2})y=1$.

**Quando** $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$. A reta tangente à $\mathcal{E}$ no ponto $P=(x_0,y_0)\in\mathcal{E}$ é dada por $r:(\frac{x_0}{b^2})x+(\frac{y_0}{a^2})y=1$.

Com essas informações responda:

1. Calcule os focos, vértices, a medida do eixo maior e a do eixo menor, esboce as elipses
   (a) $x^2/9+y^2/25=1$ e $4x^2+10y^2=40$
   (b) $4x^2+169y^2=676$ e $16x^2-4+4y^2=0$
2. Escreve a equação reduzida da elipse nos seguintes casos:
   (a) $Centro=(0,0)$, eixo focal paralelo ao eixo $x$, o eixo menor mede 6 e a distância focal é 8.
   (b) Os focos são $(0,6)$ e $(0,-6)$ e o eixo maior mede 34
   (c) $Centro=(0,0)$, um foco é $(0,-\sqrt{40})$ e o ponto $(\sqrt{5},14/3)$ pertence à elipse.
   (d) Os focos são $F_1=(1,1)$ e $F_2=(-1,-1)$ e satisfaz $dist(P,F_1)+dist(P,F_2)=4$
3. Considere uma elipse com foco $F=(-2,0)$ que passa por $P=(2,-3)$ e tem como reta diretriz é $r:x+8=0$. Encontre a excentricidade da elipse. *Rpta:* $e=1/2$.
4. Encontre a eqeção da elipse cujo focos e vértices coincidem com os focos e vértices das parábolas $\mathcal{P}_1: y^2+4x=12$ e $\mathcal{P}_2: y^2-4x=12$. *Rpta:* $5x^2+9y^2=45$.
5. Se uma elipse tem seu centro na origem, seus focos sobre o eixo x a distância entre as diretrizes é 12. Se $P=(3,\sqrt{5})$ pertence à elipse, encontre sua equação reduzida. *Rpta:* Duas elipses, $\mathcal{E}_1: 8x^2+24y^2=192$ e $\mathcal{E}_2: 35x^2+84y^2=735$.
6. Seja $B_1=(3,5)$ e $B_2=(3,-3)$ os extremos do eixo menor da elipse que tem uns dos vértices sobre a reta $3x-y+7=0$. *Rpta:* $\mathcal{E}: 16(x-3)^2+25(y-1)^2=400$.
7. Considere a equação da elipse em forma reduzida. Mostre que se $(x_0,y_0)$ está na elipse, os pontos $(x_0,-y_0)$, $(-x_0,y_0)$ e $(-x_0,-y_0)$ também pertencem à elipse.
8. Se a distância entre as diretrizes de uma elipse é 18, e os focos são os pontos (1,5) e (1,3). Encontre a equação da elipse. *Rpta:* $9(x-1)^2+8(y-4)^2=72$.

9. Considere a elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, com foco $F_1 = (c, 0)$, $F_2 = (-c, 0)$ e um ponto $P = (x_0, y_0)$ da elipse. Mostre que o raio vetor $PF_1$ é igual $a - ex_0$ (i.e $|\overrightarrow{PF_1}| = a - ex_0$ ) e raio vetor $PF_2$ é $aa + ex_0$ (i.e $|\overrightarrow{PF_2}| = a + ex_0$ )

10. Encontre a equação da corda focal da elipse $16x^2 + 25y^2 = 400$, cujo comprimento é 8 unidades e passa pelo foco com coordenadas positivas. *Rpta:* $\sqrt{2}y \pm 2(x - 3) = 0$.

11. Considere a parábola $\mathcal{P} : x^2 = 4y$. Ache a equação da elipse cujo centro é o vértice de $\mathcal{P}$ tal que o extremo do eixo menor é o foco da parábole e o eixo tranverso da elipse é paralelo à diretriz da parábola. *Rpta:* $\mathcal{E} : x^2 + 2y^2 = 32$. *Dica:* Considere que a corda é PQ, onde P e Q estão na elipse. (1) Encontre primeiro o foco $F = (f_1, f_2)$, (2) Escreva a equação da reta que define a corda PQ, tipo $y - f_1 = m(x - f_2)$, onde $m$ é a incognita, (3) Note que o comprimento do segmento PQ é igual à soma dos segmentos PF e FQ, (4) Use o problema anterior para calcular PF e FQ.

12. Encontre a equação da elipse com centro $(1, -3)$, com um foco em $(0, -6)$ e a interseção do eixo focal com uma diretriz da elipse é $(3, 3)$. *Rpta:* $e = 1/\sqrt{2}$, $\mathcal{E} : 19x^2 - 6xy + 11y^2 - 56x + 72y - 64 = 0$.

13. Seja $\mathcal{E}$ uma elipse e $P$ um ponto exterior à elipse ($P \notin \mathcal{E}$). Encontre as retas tangentes da elipse que passam por P, nos seguintes casos:

    (a) $\mathcal{E} : 9y^2 + 4x^2 = 72$, $P = (0, 4)$ *Rpta:* $2x + 3y - 12 = 0$, $2x - 3y + 12 = 0$;

    (b) $\mathcal{E} : 2x^2 + 3y^2 + x - y = 5$, $P = (3, -1)$ *Rpta:* $x + y = 2$, $9x - 191y = 218$.

    (c) A reta $r : 2x - y - 3 = 0$ é tangente à elipse $\mathcal{E} : 9x^2 + 16y^2 = 144$? *Rpta:* não, $r$ é uma reta secante (i.e. corta a elipse em dois pontos)

    (d) A reta $r : 2x + y = 10$ é tangente à elipse $\mathcal{E} : 4x^2 + 9y^2 = 36$? *Rpta:* não, $r$ não intercepta a elipse.

14. Seja $\mathcal{E}$ uma elipse, com excentricidade 1/5 tal que $r : 2x + y + 128 = 0$ é a diretriz associada ao foco $F = (-4, 0)$. Ache a equação da elipse assim como também a equação da outra diretriz. *Rpta:* $121x^2 - 4xy + 124y^2 + 488x - 256y - 14384 = 0$ e diretriz $2x + y - 122 = 0$.

15. Seja $\mathcal{E} : x^2 + 3y^2 + 3x - 4y = 3$. Encontre os valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para que as retas $5x + 2y + \alpha$ sejam tangentes à elipse. *Rpta:* $\alpha = -7$ e $\alpha = 58/3$.

16. **Propriedade refletora da Elipse:* Mostre que a tangente da elipse num ponto T da elipse forma ângulos iguais com os raios focais em dito ponto. *Dica:* Considere a forma reduzida da elipse e a formula $\tan(\alpha + \beta) = (\tan(\alpha) + \tan(\beta))/(1 - \tan(\alpha)\tan(\beta))$.

17. Seja $\mathcal{E} : 4x^2 + 9y^2 = 180$. Do foco esquerdo da elipse sai um raio de luz com um ângulo de inclinação $\alpha$ com $\tan(\alpha) = -2$, que bate na elipse no ponto $P = (x_0, y_0)$ ($y_0 > 0$) e é refletido. Ache a equação da reta que contem o raio refletido. *Rpta:* $r : 2x + 11y - 10 = 0$.

## Hipérbole

Dado dois pontos $F_1$ e $F_2$ no plano, e dois números positivos $a$ e $c$ ($c > a$) com $dist(F_1, F_2) = 2c$. A hipérbole é o conjunto

$$\mathcal{H} := \{P \in \mathbb{R}^2 : |dist(P, F_1) - dist(P, F_2)| = 2a\}.$$

Os pontos $F_1$ e $F_2$ são chamados de focos. Defina $b := \sqrt{c^2 - a^2}$. Por definição de $b$, temos que $c^2 = b^2 + a^2$ (**perceba as diferenças com a hipérbole**). O número $e := \frac{c}{a}$ é chamado de *excentricidade* da hipérbole. Veja que para a hipérbole $e > 1$.

1. **eixo focal (eixo transverso):** reta que contem os focos $F_1$ e $F_2$;

2. **vértices:** Interseção do eixo focal com a hipérbole. A interseção são dois pontos denotados por $V_1$ e $V_2$;

3. **centro :** Ponto meio do segmento $F_1F_2$;

4. **eixo normal (eixo conjugado):** reta perperndicular ao eixo focal que passa pelo centro;
5. **corda:** qualquer segmento de une dois pontos diferentes da hipérbole;
6. **corda focal:** corda que passa por algum foco;
7. **lado reto :** corda focal paralela ao eixo normal;
8. **raio vetor:** segmento de reta que une algum foco com algum ponto da hipérbole;
9. **eixo maior:** segmento $V_1V_2$. Observe que o eixo maior tem comprimento $2a$;
10. **eixo menor:** segmento definido pela interseção da hipérbole com o eixo normal. O eixo menor tem medida $2b$ ;
11. **retas diretrizes:** retas paralelas à reta normal cuja distância ao centro $C$ é $a/e$.
12. **rectângulo fundamental:** rectângulo cujo centro é o centro da hipérbole, com lados de comprimento 2a e 2b e paralelos aos eixo transveso e conjugado respectivamente.
13. **assintotas:** retas que passam por $C$, não interceptam à hipérbole mas tendem à hipérbole no infinito. Ditas retas são definas pelas diagonais do rectângulo fundamental.
14. **ramo da hipérbole:** cada uma das curvas que definem a hipérbole.

Observe que para a hipérbole $dist(V_1, V_2) = 2a < dist(F_1, F_2) = 2c$.

*Remark 1:* Note que a hipérbole é simetrica em relação ao eixo focal e ao eixo normal.

*Remark 2:* Veja a construção geometrica da hipérbole na internet, por exemplo, `https://www.youtube.com/watch?v=ETV_bWAPOqU`.

Usando um sistema de coordenadas a hipérbole $\mathcal{H}$ pode ser escrita com uma das seguintes formas.

**Forma canônica** (também chamada de forma reduzida). Nesta caso, a hipérbole é o lugar geometrico definido por $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ( hipérbole horizontal) ou $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ ( hipérbole vertical), onde o centro $C = (0, 0)$ e o eixo focal é paralelo a algum dos eixos canônicos. *Desenhe ambas hipérbole explicitando o segmento que tem comprimento $a$ e/ou $b$. Lembre $dist(V_1, V_2) = 2a$.*

*Remark:* Nesse caso as assíntotas podem ser facilmente calculadas. De fato:

1. Quando $\mathcal{H}$ é uma hipérbole horizontal, as assíntotas são as retas $y = \pm\frac{b}{a}x$;
2. Quando $\mathcal{H}$ é uma hipérbole vertical, as assíntotas são as retas $y = \pm\frac{a}{b}x$.

Quando o centro $C = (h, k)$ e o eixo focal é paralelo a algum dos eixos canônicos, temos que a hipérbole pode ser descrita como $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ ou $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$.

**Forma geral sem rotação** $Ax^2 - Cy^2 + Dy + Ex + F = 0$. onde o eixo focal é paralelo a algum dos eixos canônicos.

**Forma geral mesmo** $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dy + Ex + F = 0$ se $B^2 - 4AC > 0$.

*Retas tangentes para a hipérbole.* Em qualquer ponto sobre a hipérbole podemos calcular retas tangentes e retas normais.

**Quando** $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. A reta tangente à $\mathcal{H}$ no ponto $P = (x_0, y_0) \in \mathcal{H}$ é dada por $r : (\frac{x_0}{a^2})x - (\frac{y_0}{b^2})y = 1$.

**Quando** $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$. A reta tangente à $\mathcal{H}$ no ponto $P = (x_0, y_0) \in \mathcal{H}$ é dada por $r : (\frac{y_0}{a^2})y - (\frac{x_0}{b^2})x = 1$.

Com essas informações responda:

1. Calcule os focos, vértices, as equações das assíntotas. Esboce as hipérboles
   (a) $16x^2 - 25y^2 = 400$ e $9y^2 - 4y^2 = 36$
   (b) $x^2 - y^2 + 1 = 0$ e $x^2 - 4y^2 = 1$

2. Escreve a equação reduzida da elipse nos seguintes casos:

   (a) Os focos são $F_1 = (3, -1)$ e $F_2 = (3, 4)$ e satisfaz $|dist(P, F_1) - dist(P, F_2)| = 3$;

   (b) Os focos são $F_1 = (-1, 1)$ e $F_2 = (1, 1)$ e satisfaz $|dist(P, F_1) - dist(P, F_2)| = 1$;

   (c) Os vértices são $(2, 0)$ e $(-2, 0)$ e os focos são $(3, 0)$ e $(-3, 0)$;

   (d) Os vértices são $(15, 0)$ e $(-15, 0)$ e as assíntotas são $5y - 4x = 0$ e $5y + 4x = 0$.

3. Encontre a equação da hipérbole cujos focos são $(4, 0)$ e $(-4, 0)$, e o coeficiente ângular duma das assíntotas é 3. *Rpta:* $\mathcal{H} : 45x^2 - 5y^2 = 72$.

4. Seja uma hipérbole com centro na origem, focos sobre o eixo x cuja distância entre as diretrizes é 4 e passa por $P = (4, 3)$. *Rpta:* $\mathcal{H} : 3x^2 - 2y^2 = 30$

5. Considere a elipse $\mathcal{E} : 25x^2 + 9y^2 = 225$. Se os focos dessa elipse coincidem com os focos duma hipérbole de excentricidade $4/3$. Escreva a equação reduzida da hipérbole. *Rpta:* $\mathcal{H} : 7y^2 - 9x^2 = 63$.

6. Calcule a àrea do triângulo formado por as assíntotas de hipérbole $\mathcal{H} : x^2 - 4y^2 = 16$ e a reta $r : 3x - 2y + 12 = 0$. *Rpta:* $9u^2$

7. Encontre a equação reduzida de uma hipérbole se os focos são os pontos $(-10, 0)$ e $(10, 0)$, e suas assíntotas são as retas $r : y = \pm 2x$. *Rpta:* $\mathcal{H} : 4x^2 - y^2 = 80$.

8. Se as assíntotas duma hipérbole, que tem um foco em $(3, -2)$, são $r_1 : 3x - 4y - 5 = 0$ e $r_2 : 3x + 4y + 11 = 0$. Encontre a sua excentricidade. *Rpta:* $e = 5/4$.

9. É possível construir uma hipérbole com focos em $(3, 4)$ e $(-1, -2)$ tal que a **medida do eixo maior** é 2. Caso afirmativo, escreva a equação de dita hipérbole. *Rpta:* Sim, $\mathcal{H} : 3x^2 + 8y^2 + 12xy - 18x - 28y + 11 = 0$. *Dica:* Use a definição da hipérbole.

10. Considere a hipérbole $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, com foco $F_1 = (c, 0)$, $F_2 = (-c, 0)$ e um ponto $P = (x_0, y_0)$ da hipérbole. Mostre que o raio vetor $PF_1$ é igual $|a - ex_0|$ (i.e $|\overrightarrow{PF_1}| = |a - ex_0|$ ) e raio vetor $PF_2$ é $|a + ex_0|$ (i.e $|\overrightarrow{PF_2}| = |a + ex_0|$ )

11. Encontre as retas tangentes da hipérbole $\mathcal{H} : x^2 - 4y^2 = 20$ perpendiculares à reta $r : 4x + 3y - 7$. *Rpta:* $r_1 : 3x - 4y + 10 = 0$ e $r_2 : 3x + 4y - 10 = 0$.

12. Ache um ponto $P$ da hipérbole $\mathcal{H} : 9x^2 - 12y^2 = 216$ mais próximo à reta $r : 3x + 2y + 1 = 0$. Calcule também a distância entre $P$ e a reta $r$. *Rpta:* $P = (-6, 3)$ e distância$= 11/\sqrt{13}$.

13. Considere uma hipérbole $\mathcal{H}$ com focos em $(6, -1)$ e $(0, -4)$ e passa por $A = (0, -9)$. Ache as equações das diretrizes. *Rpta:* $\mathcal{D}_1 : 6x + 3y - 23 = 0$ e $\mathcal{D}_2 : 6x + 3y + 2 = 0$.

14. **Propriedade refletora da Hipérbole:* Mostre que a tangente da hipérbole num ponto T forma ângulos iguais com os raios focais em dito ponto. *Dica:* Considere a forma reduzida da elipse e a formula $\tan(\alpha + \beta) = (\tan(\alpha) + \tan(\beta))/(1 - \tan(\alpha)\tan(\beta))$.

15. Encontre a equação da hipérbole com centro na origem, que passa por $P = (0, 2)$ se o eixo focal é $2x - y = 0$ e uma assintota é o eixo x. *Dica:* *Rpta:* $\mathcal{H} : 3y^2 + 4xy = 12$.

## Estudo unificado das cônicas não degeneradas

Usando a excentrecidade, é possível escrever todas as cônicas não degeneradas (menos a cricunferência) de forma uniforme. De fato, temos o seguinte resultado:

**Theorem 0.1** *Seja uma reta fixa $\mathcal{D}$, chamada de diretriz e um ponto $F$ fixo chamado foco com $F \notin \mathcal{D}$. Defina o seguinte lugar geometrico*

$$\mathcal{K} := \{P \in \mathbb{R}^2 : dist(P, F) = e \ \ dist(P, \mathcal{D})\}. \tag{1}$$

*onde $e > 0$ é uma constante fixa. Esse lugar geometrico $\mathcal{K}$ é chamado de cônica. Dependendo do valor de e temos as seguintes alternativas:*

1. *Se $e = 1$, então $\mathcal{K}$ é uma parábola;*
2. *Se $e \in (0, 1)$, então $\mathcal{K}$ é uma elipse;*
3. *Se $e > 1$, então $\mathcal{K}$ é uma hipérbole.*

*Reciprocamente, toda cônica não degenerada que não seja uma circunferência pode ser escrita como* (1).

*Remark:* As seções cônicas são curvas obtidas ao intercetar um plano com um cone. Veja, por exemplo: `https://www.youtube.com/watch?v=HO2zAU3Eppo`.

Responda as seguintes questões:

1. Seja $\mathcal{K}$ uma cônica que passa por $P = (-2, 3)$, com foco $F = (2, 3)$ e reta diretriz $\mathcal{D} : y + 1 = 0$. Identifique a cônica e encontre a equação analítica que a descreve. *Rpta:* $\mathcal{K}$ é uma parábola cuja equação é $x^2 - 4x - 8y + 12 = 0$.
2. Se temos uma cônica cujo foco é $(-1, -4)$, cuja reta diretriz é $x = 2$ e passa por $P = (-3, -5)$, identifique dita cônica e ache a sua equação. *Rpta:* elipse, $\mathcal{E} : 4x^2 + 5y^2 + 14x + 40y + 81 = 0$.
3. Considere uma cônica cujo foco é $(3, -1)$, cuja reta diretriz é $2x - 3 = 0$ e passa por $P = (6, 55)$. Identifique a cônica e ache a sua equação. *Rpta:* hipérbole $\mathcal{H} : 11x^2 - 9y^2 - 6x - 18y - 45 = 0$.