Lista 4: Otimização I

A. Ramos *

November 19, 2017

Abstract

Lista em constante atualização.

1. Dualidade, condições de otimalidade, condições KKT.
2. Para os exercícios que forem convenientes pode ser usado alguma linguagem de programação.

1. Prove que a função dual é concava e o domínio dela é convexo.

2. Seja B uma matriz simétrica definida positiva. Encontre o problema dual do problema de minimização:

$$\text{minimizar} \quad \frac{1}{2}x^T Bx \quad \text{sujeito a} \quad Ax = b, x \geq 0.$$

3. Verifique no caso de programação linear que o dual do problema dual é o problema original. Se (P) denota um problema de programação linear e (D) o problema dual associado. Mostre que (i) se (P) é ilimitado inferiormente, então (D) é inviável; (ii) se (P) é viável e limitada inferiormente, então (D) tem uma solução ótima e o gap de dualidade é zero; (iii) se (P) é inviável dê exemplos onde (D) é ilimitado ou inviável.

4. Considere o problema de minimização: minimizar $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}(y-3)^2$ sujeito a $x^2 - y \leq 0, \quad -x + y \leq 2.$
   (a) O problema anterior é um problema de otimização convexa?
   (b) Solucione o problema geometricamente
   (c) Dê um motivo teórico que justifique a existência de pontos KKT. Dê também um motivo para a unicidade de ponto KKT.
   (d) Escreva as condições KKT e determine o ponto KKT.
   (e) Determine explicitamente o problema dual
   (f) Encontre uma solução ótima do problema dual.

5. Considere o problema de minimização: minimizar $x - 4y + z$ sujeito a $x + 2y + 2z + 2 = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 1.$
   (a) Dado um ponto KKT, esse ponto deve ser ótimo?
   (b) Encontre a solução ótima do problema usando as condições KKT.

6. *Problema de otimização minimax.* Seja $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\} \in \mathbb{R}^n$ um conjunto de vetores e dado $k \in \mathbb{N}$, defina o conjunto $\Delta(k) := \{x \in \mathbb{R}^k : \sum_{i=1}^k x_i = 1, x_i \geq 0, i = 1, \ldots, k\}$. Considere o problema de otimização:

$$\underset{x \in \Delta(n)}{\text{minimizar}} \ \max\{\langle a_i, x\rangle : i = 1, \ldots, m\}.$$

   Mostre que o problema dual é

$$\underset{y \in \Delta(m)}{\text{maximizar}} \ \underset{x \in \Delta(n)}{\text{minimizar}} \ \langle y, Ax\rangle,$$

   onde A é uma matriz onde as linhas são os vetores $a_1, \ldots, a_m$.
   Dica: Re-escreva o problema $\underset{x \in \Delta(n)}{\text{minimizar}} \ \max\{\langle a_i, x\rangle : i = 1, \ldots, m\}$ como $\underset{x \in \Delta(n), v}{\text{minimizar}} \ v$ s.a. $\langle a_i, x\rangle \leq v, \ \forall i$, e aplique dualidade neste último problema.

7. Considere o problema de otimização minimizar $x^4 - 2y^2 - y$ sujeito a $x^2 + y^2 + y \leq 0$. Responda
   (a) O problema é convexo?
   (b) Mostre que existe solução ótima.
   (c) Encontre todos os pontos KKT. Para cada ponto, quais satisfazem a condição necessária de segunda ordem?

*Department of Mathematics, Federal University of Paraná, PR, Brazil. Email: albertoramos@ufpr.br.

(d) Encontre a solução global.

8. Calcule o cone tangente $T_\Omega(z)$ e o cone linearizado $L_\Omega(z)$ em $z = 0$, onde $z \in \Omega$ e Ω é cada um dos seguintes conjuntos

   (a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \le x^3\}$

   (b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0 \text{ ou } x = 0\}$

   (c) $\{r(\cos\theta, \sin\theta) \in \mathbb{R}^2 : r \in [0, 1], \theta \in [\pi/4, 7\pi/4]\}$

   Vale alguma condição de qualificação?

9. Considere $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^n : F(x) \in C\}$, onde C é um cone fechado em $\mathbb{R}^m$ e $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é uma função continuamente derivável.

   (a) Prove que $T_\Omega(x) \subset \{d \in \mathbb{R}^n : DF(x)d \in T_C(F(x))\}$ para todo $x \in \Omega$.

10. Prove que se $x^* \in U \subset V$, então $T_U(x^*) \subset T_V(x^*)$. Pode existir igualdade entre os cones tangente mesmo que os conjuntos U e V sejam diferentes?

11. Prove que $\widehat{N}_\Omega(x) \subset N_\Omega(x)$, $\forall x \in \Omega$. Dê um exemplo onde a inclusão é estrita.

12. (a) Seja $C := \{d \in \mathbb{R}^n : Ad \le 0, Bd = 0\}$. Mostre que C é um cone fechado e calcule C°. Qual é $C^{\circ\circ}$?

    (b) Seja $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : g_j(x) \le 0 \;\; \forall j = 1, \dots, p; \;\; h_i(x) = 0, \;\; \forall i = 1, \dots, m\}$, onde g_j e h_i são funções afins $\forall i, j$. Dado $x \in \Omega$, calcule o cone tangente $T_\Omega(x)$, o cone normal regular $N_\Omega(x)$ e mostre que a condição de Guignard vale.

13. Seja $A \in \mathrm{Sym}_+(\mathbb{R})$. Prove que $T_{\mathrm{Sym}_+(\mathbb{R})}(A) = \mathrm{Sym}_+(\mathbb{R}) - \mathbb{R}_+(A)$ e $\widehat{N}_{\mathrm{Sym}_+(\mathbb{R})}(A) = \mathrm{Sym}_-(\mathbb{R}) \cap \{H \in \mathrm{Sym}(\mathbb{R}) : \mathrm{tr}(AH) = 0\}$.

14. Seja $v \in \mathbb{R}^n$. Mostre que (i) $\|v\|_1 = \mathrm{Sup}\{\langle v, w\rangle : \|w\|_\infty \le 1\}$, (ii) $\|v\|_\infty = \mathrm{Sup}\{\langle v, w\rangle : \|w\|_1 \le 1\}$ e que (iii) $\|v\|_2 = \mathrm{Sup}\{\langle v, w\rangle : \|w\|_2 \le 1\}$.

15. *Desigualdade de Holder.* Prove a desigualdade de Holder [1] usando o problema de maximização

$$\underset{x}{\text{maximizar}} \; \{\langle x, y\rangle : \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p = 1\},$$

   onde y é um vetor fixo com $\|y\|_q = 1$ e $1/p + 1/q = 1$ $(p, q > 1)$.

16. *Ausência de pontos KKT.* Seja o problema de otimização

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & x^2 + y^2 \\ \text{sujeito a} & x^2 = (y-1)^3 \end{array}$$

   (a) Resolva o problema geometricamente

   (b) Mostre que não existe pontos satisfazendo as condições KKT

   (c) Encontre todos os pontos que satisfazem as condições FJ

   (d) Para tentar resolver o problema de minimização podemos substituir $x^2 = (y-1)^3$ na função objetivo para obter o problema sem restrições $\min\,(y-1)^2 + y^2$. O que tem de errado essa abordagem? como podemos corrigir?

17. Seja $y \in \mathbb{R}^n$. Considere o problema de minimização

$$\begin{array}{ll} \underset{x}{\text{minimizar}} & \frac{1}{2}\|x - y\|^2 \\ \text{sujeito a} & Ax + b = 0 \end{array}$$

   (a) Mostre que o problema admite solução.

   (b) Quando A tem posto linha completo, mostre que a solução é única, que as condições KKT valem e a solução tem a expressão $y - A^T(AA^T)^{-1}(Ay + b)$.

18. *Atualização simétrica de Powell-Broyden (PSB).* Seja A uma matriz simétrica $n \times n$, e vetores s e y em $\ltimes$. Considere o seguinte problema de minimização

$$\text{minimizar } \|B - A\|_F^2 \quad \text{sujeito a} \quad Bs = y, \quad B^T = B,$$

   onde $\|\cdot\|_F$ é a norma de Frobenius

[1] Para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$, temos que $|\langle x, y\rangle| \le \|x\|_p \|y\|_q$ com igualdade se, e somente se x e y são paralelos. A $p-$norma $\|z\|_p$ é definida como $\|z\|_p^p := \sum_{i=1}^n |z_i|^p$.

(a) Mostre que o conjunto viável é um conjunto fechado convexo não vazio.
(b) Mostre que o problema de minimização tem uma única solução.
(c) Encontre a expressão para dita solução.

19. *Atualização BFGS.* Seja A uma matriz simétrica $n \times n$, e vetores s e y em ⋉ com $s^y > 0$. Considere o seguinte problema de minimização

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & \operatorname{tr}(BA) - \ln \det(B) \\ \text{sujeito a} & Bs = y \\ & B \in \operatorname{Sym}_{++}(\mathbb{R}). \end{array}$$

(a) Mostre que existe ao menos um ponto viável, verificando que $\langle s, y - ts \rangle^{-1}(y - ts)(y - ts)^T + tI$ é viável para $t > 0$ suficientemente pequeno.
(b) Mostre que o problema de minimização tem solução. *Dica:* Analise o conjunto de nível da função objetivo. Observe que neste problema o conjunto viável não é fechado. Compare com o problema anterior (atualização PSB).
(c) Mostre que existe uma única solução.
(d) Use as condições KKT para encontrar a expressão para dita solução. Por que as condições KKT valem? Justifique.

20. Responda

(a) Prove que LICQ implica MFCQ
(b) Mostre que a condições de Mangasarian-Fromovitz (MFCQ) vale se, e somente se o conjunto de multiplicadores é não vazio e compacto.
(c) Seja $C = \{x \in \mathbb{R}^n : g_j(x) \leq 0, j = 1, \ldots, p; h_i(x) = 0, i = 1, \ldots, m\}$ onde todas as funções g_j são convexas e h_i são funções afins. (i) Prove que a condição de Slater implica a MFCQ. (ii) Se $\{\nabla h_i(x) : i = 1, \ldots, m\}$ é um conjunto linearmente independente, mostre que MFCQ implica a condição de Slater.

21. Seja A uma matriz simétrica $n \times n$ (não necessariamente definida positiva), b e c vetores em $\mathbb{R}^n$ e Δ um escalar positivo. Considere o problema de minimização.

$$\begin{array}{ll} \underset{x}{\text{minimizar}} & \frac{1}{2}\langle x, Ax \rangle + \langle b, x \rangle + c \\ \text{sujeito a} & \|x\| \leq \Delta \end{array}$$

Mostre que é o problema admite um minimizador global que está na fronteira. As condições KKT valem nesse ponto? Vale alguma CQ?

22. Prove que B é definida positiva no subespaço $\ker(A)$ se, e somente se existe um $\rho^* > 0$ tal que $B + \rho AA^T$ é definida positiva para todo $\rho \geq \rho^*$

23. Seja B uma matriz simétrica $n \times n$ (não necessariamente definida positiva) e c um vetor em $\mathbb{R}^n$. Considere o problema quadrático de minimização com restrições de igualdade:

$$\begin{array}{ll} \underset{x}{\text{minimizar}} & \frac{1}{2}\langle x, Bx \rangle + \langle c, x \rangle \\ \text{sujeito a} & Ax = b \end{array}$$

Responda

(a) Se x^* é minimizador local, então x^* deve satisfazer as condições KKT: $Bx^* + c \in \operatorname{Im}(A^T)$ e $Ax^* = b$.
(b) Mostre que x^* deve satisfazer a *condição necessária de segunda-ordem* que B é semi-definida positiva sobre o subespaço $\ker(A)$.
(c) Prove que se um ponto KKT satisfaz a condição necessária de segunda ordem do item anterior, é de fato, um *minimizador global* do problema quadrático.

24. Seja B uma matriz simétrica $n \times n$, A uma matriz $m \times n$, $b \in \mathbb{R}^n$ e $c \in \mathbb{R}^m$. Considere o problema de minimização.

$$\begin{array}{ll} \underset{x}{\text{minimizar}} & \frac{1}{2}\langle x, Bx \rangle + \langle b, x \rangle + c \\ \text{sujeito a} & Ax + c = 0 \end{array}$$

Se A tem posto linha completo e B é definida positiva no núcleo de A, isto é, $\langle d, Bd \rangle > 0$ $\forall d \in \operatorname{Ker}(A)$, $d \neq 0$. Mostre que o problema tem um único ponto estacionário que é minimizador global.