Lista 4: Geometria Analítica

A. Ramos *

6 de junho de 2017

Resumo

Lista em constante atualização.

1. Transformação de coordenadas;
2. Equação da parabóla;

Transformação de coordenadas

Existe dois tipos de transformações importantes: *traslação* e *rotação*, quais podem ser combinados para descrever movimentos mais complexos. É importante se sentir confortável com essas transformações.

Translação de eixos. Em $\mathbb{R}^2$ (em $\mathbb{R}^3$ é similar), considere um sistema de coordenadas cuja origem $O = (0, 0)$ é trasladada a $O' = (h, k)$. Seja $P \in \mathbb{R}^2$ um ponto com coordenadas (x, y) no sistema de coordenadas original e com coordenadas (x', y') no novo sistema de coordenadas (com origem O'). Então, temos que :

$$x = x' + h \quad \text{e} \quad y = y' + k.$$

Rotação de eixos. Em $\mathbb{R}^2$, considere dois sistemas de coordenadas, uma obtida apartir da outras atraves de uma rotação (com ângulo θ e sentido antihorário). Se $P \in \mathbb{R}^2$ um ponto com coordenadas (x, y) no sistema de coordenadas original e com coordenadas (x', y') no novo sistema de coordenadas. Então,

$$x = x' \cos(\theta) - y' \sin(\theta) \quad \text{e} \quad y = x' \sin(\theta) + y' \cos(\theta).$$

Usando matrizes podemos escrever a expressão como (talvez mais fácil para decorar):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Da expressão anterior temos que

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Responda:

1. Usando uma translação transforme a equação $2x^2 - 3xy + 5x + 3y - 8 = 0$ em outra equação sem termos lineares. *Rpta:* Nova origem $O' = (1, 3)$ e equação $2x'^2 - 3x'y' - 1 = 0$

2. Mediante uma translação transforme a equação $8x^3 - x^2 + 24x - y + 1 = 0$, em outra que não tem termos de segunda ordem nem termo constante. *Rpta* Nova origem $O' = (-4, 8)$ e equação $(x')^2y' - 1 = 0$.

3. Encontre o ângulo de rotação para que a curva $8x^2 + 3\sqrt{3}xy + 11y^2 = 24$ não tenha o termo xy. *Rpta* $\theta = 60°$.

4. Mostre que a curva $11x^2 + 24xy + 4y^2 = 20$ depois de uma rotação $\theta = arctan(3/4)$ se escreve como $4x'^2 - y'^2 = 4$.

5. Usando primeiramente uma translação com nova origem $O' = (1, 1)$ e logo uma rotação de 45°, uma equação se transforma em $(x'')^2 - 2(y'')^2 = 2$. Qual é a equação original? *Rpta:* $x^2 - 6xy + y^2 + 4x + 4y = 0$.

*Department of Mathematics, Federal University of Paraná, PR, Brazil. Email: `albertoramos@ufpr.br`.

Parábola

Dada uma reta $\mathcal{D}$ e um ponto $F \notin \mathcal{D}$. A parábola é definida como

$$\mathcal{P} := \{P \in \mathbb{R}^2 : dist(P, F) = dist(P, \mathcal{D})\}.$$

O ponto F é chamado de foco e a reta $\mathcal{D}$ é chamada de reta diretriz.

1. **eixo de simetria:** reta perpendicular à diretriz que passa por F;
2. **vértice:** interseção no eixo de simetria com a parábola;
3. **corda:** qualquer segmento de une dois pontos diferentes da parábola;
4. **corda focal:** corda que passa por F;
5. **lado reto (ou corda principal):** corda focal paralela à diretriz;
6. **raio vetor:** segmento de reta que une o foco com algum ponto da parábola.

Usando um sistema de coordenadas a parábola $\mathcal{P}$ pode ser escrita com uma das seguintes formas.

Forma canônica (também chamada de *forma reduzida*) $y^2 = 4px$ ou $x^2 = 4py$. onde o vertice $V = (0, 0)$ e o eixo de simetria é paralelo a algum dos eixos canônicos.

$$\text{Observe que } |p| = dist(V, F) \text{ e } |p| = dist(V, \mathcal{D}).$$

Quando o vertice $V = (h, k)$ e o eixo de simetria é paralelo a algum dos eixos canônicos temos que $(y-k)^2 = 4p(x-h)$ ou $(x-h)^2 = 4p(y-k)$.

Forma geral $y^2 + Dy + Ex + F = 0$ ou $x^2 + Dx + Ey + F = 0$ onde o eixo de simetria é paralelo a algum dos eixos canônicos.

Retas tangentes: Em qualquer ponto sobre a parábola podemos calcular retas tangentes e retas normais. Para as retas tangentes temos as seguintes formulas qual depende da equação usada da parábola.

Quando $y^2 = 4px$. A reta tangente a $\mathcal{P}$ no ponto $P = (x_0, y_0) \in \mathcal{P}$ é dada por $r : yy_0 = 2p(x + x_0)$.

Quando $x^2 = 4py$. A reta tangente a $\mathcal{P}$ no ponto $P = (x_0, y_0) \in \mathcal{P}$ é dada por $r : xx_0 = 2p(y + y_0)$.

Proceda a responder as seguintes questões

1. Escreva as equações das seguintes parábolas.
   (a) Se $F = (0, 2)$ e diretriz $\mathcal{D} : y + 2 = 0$.
   (b) Se $F = (0, 0)$ e diretriz $\mathcal{D} : y + x = 2$.
   (c) Se o vértice é $V = (-3, 2)$ e foco $F = (-1, 2)$.
2. Ache a equação da parabóla que tem foco $(-5/3, 0)$ e cuja reta diretriz é $3x - 5 = 0$. *Rpta* $3y^2 + 20x = 0$.
3. Encontre a longitude da corda focal da parábola $\mathcal{P} : x^2 + 8y = 0$ que é paralela à reta $r : 3x + 4y - 7 = 0$. *Rpta:* $25/2$.
4. Encontre a equação da parábola com foco $F = (2, 1)$, com vértice sobre a reta $r : 3x + 7y + 1 = 0$ e cuja diretriz é paralela ao eixo x. *Rpta:* $\mathcal{P} : (x-2)^2 = 8(y+1)$.
5. Se uma parábola tem um vértice sobre a reta $r_1 : 3x - 2y = 19$, o foco sobre a reta $r_2 : x + 4y = 0$ e diretriz $\mathcal{D} : x = 2$. *Rpta:* $(y+2)^2 = 12(x-5)$.
6. Encontre a equação de uma parábola cuja lado reto tem como extremo os pontos $A = (7, 3)$ e $B = (1, 3)$. *Rpta:* $\mathcal{P}_1 : (x-4)^2 = 6(y - 3/2)$ e $\mathcal{P}_2 : (x-4)^2 = -6(y - 9/2)$.
7. Encontre o valor de $\alpha \neq 0$, para que as coordenadas do foco da parábola $\mathcal{P} : x^2 + 4x - 4\alpha y = 8$ somem zero. *Rpta:* $\alpha = 3$ ou $\alpha = -1$.

8. Encontre a equação da circunferência que passa por o vértice e os extremos do lado reto da parábola $\mathcal{P} : y^2 + 2y - 4x + 9 = 0$. *Rpta:* $\mathcal{C} : (x - 1/2)^2 + (y + 1)^2 = 9/4$.

9. Encontre a equação da reta tangente e normal da parábola $\mathcal{P} : y^2 + 2y - 4x - 7 = 0$ no ponto de contato $T = (7, 5)$ $(T \in \mathcal{P})$. *Rpta:* reta tangente: $x - 3y + 8 = 0$ e reta normal: $3x + y - 26 = 0$.

10. Encontre as retas tangentes à parabóla $\mathcal{P} : y^2 + 3x - 6y + 9 = 0$ que passa por $P = (1, 4)$. *Rpta:* $3x - 2y + 5 = 0$ e $x + 2y - 9 = 0$.

11. Considere a reta $r : x - 2y - 8 = 0$. Ache o ponto da parabóla $x^2 = 4y$ tal que a distância à reta r seja a mínima possível e calcule tal distância. *Dica:* O ponto deve ser ponto de tangência. *Rpta:* $T = (1, 1/4)$, distancia= $3\sqrt{5}/2$.

12. * Considere a parabóla $\mathcal{P} : x^2 - 2x + 8y - 23 = 0$, o ponto de tangência $T = (5, 1)$ e um triângulo formado pelo eixo y, a reta tangente e a reta normal em T. Considere um rectângulo com uns dos lados paralelos ao eixo y. Escreva, a àrea do triângulo em função do comprimento x da base e calcule a àrea do rectangulo com a maior àrea possível. *Rpta:* A àrea em função de x é $Area_{\Delta}(x) = x(10 - 2x)$, $x \in (0, 5)$. O máximo acontece quando $x = 5/2$ e $Area_{\Delta}(5/2) = 12,5u^2$.

13. ** Se o vértice de uma parabóla $\mathcal{P}$ é $V = (-3, 1)$, sua reta diretriz é paralela a $r : 3x + 4y - 6 = 0$ e uns dos extremos do lado reto é $(6, 3)$. Encontre a equação da parabóla. *Rpta:* $p = 7$, $\mathcal{P} : 16x^2 - 24xy + 9y^2 - 300x - 650y - 475 = 0$.

14. A entrada duma igreja tem a forma duma parabóla de 9 m. de altura e 12 m. de base. Toda a parte superior é uma janela de vidro cuja base é paralela à base da entrada e tem um comprimento de 8 m. Qual a altura máxima da janela? *Rpta:* altura=4m.