Lista 3: Análise II

A. Ramos *

11 de maio de 2017

Resumo

Lista em constante atualização.

1. Convergência pontual e uniforme
2. Série de potências

Notação: $\mathbb{N} := \{1, 2, \ldots, \}$. A convergência uniforme é denotado como $f_n \xrightarrow{u} f$.

1 Convergência uniforme e séries de potências.

1. Enuncie e demonstre em detalhe, com as hipoteses suficientes, que:
   (a) Uma sequencia de funções converge uniformemente se, e somente se a sequencia é de Cauchy
   (b) O limite uniforme de funções contínua é contínua.
   (c) O limite uniforme de funções integráveis é integrável e a integral do limite é o limite das integráveis
   (d) O limite uniforme de funções deriváveis é derivável e a derivada do limite é o limite das derivadas.
   (e) Mostre o Teorema de Dini.

2. Veja se as seguintes séries de funções convergem uniformemente no conjunto X.
   (a) $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x}{x^2+n^2}$, $X = \mathbb{R}$; $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{sin(nx)}{x^2+n^{3/2}}$, $X = \mathbb{R}$; $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{cos(nx^3)}{n^3}$, $X = \mathbb{R}$
   (b) $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x}{(1+nx^2)n^{\varepsilon}}$, $X = [-a, a], a > 0, \varepsilon > 0$; $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^x}$, $X = [a, \infty), a > 1$
   (c) $\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \frac{\cos(nx)}{(2n^5+3)^{1/7}}$, $X = [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon], \varepsilon > 0$ e $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{x+n}$, $X = [0, \infty)$
   (d) $\sum_{n\in\mathbb{N}} x^{2^n+\sqrt{n}}$, $X = (0, 1)$ e $\sum_{n\in\mathbb{N}} \sqrt{n}\sin(x/n^2)$, $X = [-a, a]$

3. (Regras de cálculo para convergência uniforme) Sejam $f_n, g_n : X \to \mathbb{R}$ sequências de funções com $f_n \xrightarrow{u} f$ e $g_n \xrightarrow{u} g$. Então:
   (a) Mostre que $f_n + g_n \xrightarrow{u} f + g$.
   (b) Para qualquer sequência convergente de numeros reais $a_n \in \mathbb{R}$ com $a_n \to a$ tem-se $a_n f_n \xrightarrow{u} af$.
   (c) Mostre que $f_n g_n \to fg$ pontualmente. De um exemplo onde a convergência não é uniforme.
   (d) Se f_n e g_n são uniformente limitadas (isto é, existe $K > 0$ tal que $sup\{|f_n(x)| : x \in X\} \leq K$, $n \in \mathbb{N}$. Similarmente para a sequência g_n). Então $f_n g_n \xrightarrow{u} fg$.
   (e) Se existe $K > 0$ tal que $\inf\{|f_n(x)| : x \in X\} \geq K$, $n \in \mathbb{N}$. Então, $1/f_n \xrightarrow{u} 1/f$.
   (f) Prove que $\phi \circ f_n \xrightarrow{u} \phi \circ f$, se $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uniformente contínua.

4. Considere $f_n(x) := (1 + \frac{x}{n})^n$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

*Department of Mathematics, Federal University of Paraná, PR, Brazil. Email: `albertoramos@ufpr.br`.

(a) Prove que $f_n \to \exp(x)$ pontualmente e a convergência uniforme em cada intervalo $[a,b] \in mathbbR$.

(b) Mostre que $(\frac{n^2+(n!)^{1/n}}{n^2})^n \to \exp(1/e)$ e $(\frac{n^{n+1}+(n+1)^n}{n^{n+1}})^n \to \exp(e)$, onde $e = \exp(1)$.

5. Sejam $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ funções. Prove que $f_n \xrightarrow{u} f$ see $\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in X\} \to 0$ quando $n \to \infty$.

6. Seja $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma sequencia de funções contínuas tal que $f_n \to f$ uniformente em $D \subset [a,b]$. Se D é denso, mostre que se f é uniformente contínua então $f_n \xrightarrow{u} f$ em $[a,b]$.

7. Seja $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma sequencia de funções uniformente Lipschitziana, isto é, existe $K > 0$ tal que $|f_n(x) - f_n(y)| \leq K|x-y|$, $\forall x, y \in [a,b]$, $n \in \mathbb{N}$. Mostre que se $f_n \to f$ então $f_n \xrightarrow{u} f$.

8. Seja $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma sequencia de funções, tal que para toda sequencia $x_n \in [a,b]$ convergente tem-se que $f_n(x_n) \to 0$. Mostre que $f_n \xrightarrow{u} 0$.

9. Verfique as seguintes igualdades:

   (a) $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $x \in \mathbb{R}$; $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $x \in \mathbb{R}$; $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $x \in \mathbb{R}$;

   (b) $\log(\frac{1+x}{1-x}) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $x \in (-1,1)$; $\frac{1}{(1-x)^4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6} x^n$, $x \in (-1,1)$

10. Expanda as funções em série de potências ao redor do ponto x^*. Determine o raio de convergência da série obtida

    (a) $f(x) = \frac{x-1}{x^2-4}$, $x^* \neq \pm 2$; $f(x) = \frac{x}{x-3}$, $x^* \neq 3$; $f(x) = tan(x)$, $x^* \neq 0$.

11. Determine o intervalo de convergência de cada uma das séries de potências

    (a) df

12. (*Critério de Raabe*) Seja

$$L := \lim_{n\to\infty} n(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}).$$

    (a) Se $L > 1$ ou $L = \infty$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

    (b) Se $L \in [0,1)$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

13. Mostre que se $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$, então as séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$ e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx)$ convergem uniformemente em $\mathbb{R}$.

14. Prove que para todo $x \in (-1,1]$, tem-se que

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n.$$

    Em particular, $\log(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

15. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função periódica de periodo 2, tal que $g(x) = x$, $x \in [0,1]$ e $g(x) = 2-x$, $x \in [1,2]$. Defina a série formal

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{3}{4})^n g(4^n x).$$

    Mostre que f está bem definido que é uma função contínua em $\mathbb{R}$ mas não é derivável em nenhum ponto.

16. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função definida como $f(x) = \exp(-1/x)$, $x > 0$ e $f(x) = 0$, $x \geq 0$. Mostre que f é de clase C^∞ em $\mathbb{R}$ mas não é analítica em $x = 0$.

17. Determine o intervalo de convergência de cada uma das séries de potências:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^n} x^n$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{(2n)!} x^n$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{a^n+b^n}, b > a > 0$; $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{3n+2}{5n+7})^n x^n$; $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin(\frac{1}{n}) x^n$.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^{1/n}},$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \log(n)}{3^n n n^{1/n}} x^n$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n n!}{e^{n^2}} x^n$.

18. Assuma que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge para $x = -4$ e diverge para $x = 6$. Quais das seguintes séries divergem ou convergem?

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} a_n; \quad (b) \sum_{n=0}^{\infty} (-3)^n a_n \quad \text{e} \quad (c) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n 9^n.$$

19. Usando a derivação e integração termo a termo, calcule as seguintes somas de séries de potências.

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}; \quad (b) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}; \quad (c) \sum_{n=0}^{\infty} n x^{2n-1}; \quad (d) \sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n; \quad (e) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{4n}.$$

20. Desenvolva as sequiente funções em séries de potências ao redor do origem (série de Maclaurin). Indique os intervalos de convergência.

$$(a) f(x) = x^2 e^x; \quad (b) f(x) = \sin(x^2); \quad (c) f(x) = \sin^2(x); \quad (d) f(x) = \frac{\exp(x^2) - 1}{x}; \quad (e) f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt.$$

21. Considere a função

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-2^{n/2}) \cos(2^n x).$$

Mostre que f é de clase $C^{\infty}(\mathbb{R})$ mas não é analítica em nenhum ponto.

22. Faça os primeiros 42 problemas do capítulo X do livro texto.