Lista 2: Análise II

A. Ramos *

27 de março de 2017

Resumo

Lista em constante atualização.

1. Teorema Fundamental do Cálculo
2. Caracterização de funções integráveis
3. Integrais improprias.

1 Teorema Fundamental do Cálculo e medida nula

1. Faça os problemas 7-13 do capítulo IX do livro texto.
2. Prove que toda função monótona é integrável.
3. Calcule a derivada de $F(x) = \int_{\sin x}^{x^3} e^{-t} dt$
4. Seja f uma função integrável em $[a, b]$ cuja integral não é nula. Mostre que existe um $c \in (a, b)$ tal que $\int_a^c f(x)dx = \int_c^b f(x)dx$.
5. Seja f uma função positiva, continua e estritamente crescente em $[a, b]$. Prove que
$$\int_a^b f(x)dx + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(s)ds = bf(b) - af(a).$$
Com essa identidade, calcule $\int_0^1 \sin^{-1}(x)dx$.
6. Seja f uma função periódica com período m e integrável em $[0, m]$. Defina $g(x) = \int_0^x f(t)dt$. Mostre que g pode não ser periódica mas existe um $c \in \mathbb{R}$ tal que $g(x) - cx$ é periódica com período m
7. Seja f uma função contínua em $[a, b]$. Assuma que existe constantes α e β tal que
$$\alpha \int_a^c f(x)dx + \beta \int_c^b f(x)dx = 0, \text{para todo } c \in [a, b].$$
Mostre que f dever ser a função nula.
8. Se $f > 0$ e f contínua em $[0, \infty)$. Mostre que se $\int_1^x f(t)dt \leq f(x)^2$. Então, $f(x) \geq 1/2(x - 1)$.
9. Mostre que
$$\int_a^b xf^{''}(x)dx = (bf^{'}(b) - b) - (af^{'}(a) - a),$$
onde assumimos que $f^{''}$ é contínua em $[a, b]$.

*Department of Mathematics, Federal University of Paraná, PR, Brazil. Email: albertoramos@ufpr.br.

10. Se $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ é contínua. Prove que $\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(\frac{i}{n})$. Assim, a integral pode ser interpretada como uma *média* de f em $[a,b]$.

11. Seja f continuamente diferenciável. Defina $a_n := \int_a^b f(t)\sin(nt)dt$. Prove que a_n converge a 0. *Dica:* Integração por partes.

12. Seja f limitada em $[a,b]$. Suponha que existe uma sequencia de partições P_n tais que $S(f,P_n) - s(f,P_n) \to 0$. Mostre que f é integrável. É necessário que $|P_n| \to 0$?

13. Use o teorema de valor médio para provar que para todo $-1 < a \leq 1$, $a_n := \int_0^a \frac{x^n}{1+x}dx$ converge para 0, quando $n \to \infty$.

14. Mostre que a função f é integrável onde f é a função $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = 2^{-n}$, se $x = j/2^n$ com $j \in \mathbb{N}$, $0 \leq j < 2^n$ e $f(x) = 0$ caso contrário.

15. Demonstre a *fórmula de Euler*. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Então:

$$\sum_{a\leq n\leq b} f(n) = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b \{x\}f'(x)dx + \{x\}f(x)|_a^b,$$

onde $\{x\} := x - [x]$ a parte não inteira de x.

16. Verifique que:

- $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \sin(\frac{i\pi}{n}) \to \frac{2}{\pi}$, quando $n \to \infty$.
- $\frac{1}{n^{p+1}}\sum_{i=1}^n i^p \to \frac{1}{p+1}$, quando $n \to \infty$ para todo $p \neq -1$. O que acontece se $p = -1$?
- $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i^s} = \frac{1}{n^{s-1}} + s\int_1^n \frac{[x]}{x^{s+1}}dx$, para qualquer $s \neq 1$, onde $[x]$ é o maior inteiro menor ou igual a x.

17. Se $X \subset [a,b]$ tem medida nula então $f(X)$ tem medida nula, se f é localmente Lipschitz em $[a,b]$ (em particular, se f é de classe C^1). Dê um exemplo que $f(X)$ não seja de medida nula mesmo que X seja de medida nula.

18. Seja f contínua em $[a,b]$ e g uma função integrável em $[c,d]$ com $g([c,d]) \subset [a,b]$. Mostre que $f \circ g$ é integrável.

19. Sabemos que o conjunto de Cantor $\mathcal{C}$ tem medida nula. Podemos construir um conjunto de Cantor com medida não nula.

20. Considere f uma função contínua em $[a,b]$ e de classe C^1 em (a,b). Assuma que $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a,b)$. Mostre que $g \circ f$ é integrável, se $g : [c,d] \to \mathbb{R}$ é integrável e $f[a,b] \subset [c,d]$.

Integral imprópria em intervalos ilimitados

- *Integral imprópria sobre* $[a,\infty)$. Seja f contínua em $[a,\infty)$. Definimos

$$\int_a^\infty f(x)dx := \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx,$$

quando o limite existir. Neste caso, a integral converge, caso contrário, dizemos que a integral diverge. Caso $\int_a^\infty |f(x)|dx$ convergir, dizemos que a *integral é absolutamente convergente.* Quando $\int_a^\infty f(x)dx$ converge mas $\int_a^\infty |f(x)|dx$ diverge, dizemos que a integral imprópria é *condicionalmente convergente.* Similarmente para as seguinte definições.

- *Integral imprópria sobre* $(-\infty,b]$. Seja f contínua em $(-\infty,b]$. Definimos

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx := \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx,$$

quando o limite existir. Neste caso, a integral converge, caso contrário, dizemos que a integral diverge.

- *Integral impróprias sobre* $(-\infty, \infty)$. Seja f contínua em $\mathbb{R}$. Definimos

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx := \lim_{a,b\to\infty} \int_{-a}^{b} f(x)dx,$$

  quando o limite existir. Neste caso, a integral converge, caso contrário, dizemos que a integral diverge. Observe que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$, não é necessariamente igual a $\lim_{c\to\infty} \int_{c}^{c} f(x)dx$, por exemplo, no caso $\int_{-\infty}^{\infty} xdx$. O limite $\lim_{c\to\infty} \int_{c}^{c} f(x)dx$ (caso existir) é chamado *Valor médio de Cauchy* é denotado por $PV \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$.

Integral impróprias em intervalos finitos

- Seja f contínua em $(a, b]$ e $|\lim_{x\to a^+} f(x)| = \infty$. Definimos

$$\int_{a}^{b} f(x)dx := \lim_{\delta\to a^+} \int_{\delta}^{b} f(x)dx,$$

  quando o limite existir. Neste caso, a integral converge, caso contrário, dizemos que a integral diverge. Caso $\int_{a}^{\infty} |f(x)|dx$ convergir, dizemos que a *integral é absolutamente convergente.*

- Seja f contínua em $[a, b)$ e $|\lim_{x\to b^-} f(x)| = \infty$. Definimos

$$\int_{a}^{b} f(x)dx := \lim_{\delta\to b^-} \int_{a}^{\delta} f(x)dx,$$

  quando o limite existir. Neste caso, a integral converge, caso contrário, dizemos que a integral diverge. Caso $\int_{a}^{\infty} |f(x)|dx$ convergir, dizemos que a *integral é absolutamente convergente.*

- Seja f contínua em $[a, b]$ exceto num ponto $c \in (a, b)$ e se um ou ambos limites laterais são infinitos. Definimos

$$\int_{a}^{b} f(x)dx := \int_{a}^{c} f(x)dx + \int_{a}^{c} f(x)dx,$$

  desde que ambas integrais impróprias à direitas sejam convergentes.

Um teorema útil para decidir se certa integral imprópria converge, é o teste de comparação.

Teorema de Comparação: Sejam dois funções contínuas f e g tais que $0 \leq f(x) \leq g(x)$, para todo $x \in [a, \infty)$, onde $a \in \mathbb{R}$.

- Se $\int_{a}^{\infty} g(x)dx$ converge, então $\int_{a}^{\infty} f(x)dx$ converge.
- Se $\int_{a}^{\infty} f(x)dx$ diverge, então $\int_{a}^{\infty} g(x)dx$ diverge.

Verifique que as seguinte integrais impróprias são convergentes ou não.

1. $\int_{0}^{2} x^{-3}dx$ (diverge), $\int_{0}^{\infty}(1 + x^2)^{-1}dx$ (converge, $\pi/2$)
2. Para quais valores de α, a integral converge $\int_{1}^{\infty} x^{-\alpha}dx$? (converge, $\alpha > 1$)
3. $\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^x)}$ (converge), $\int_{1}^{\infty} \frac{(x+1)}{\sqrt{x^3}}dx$ (diverge), $\int_{0}^{\infty} x \sin x dx$ (diverge)
4. $\int_{0}^{\infty} e^{-ax} \sin(bx)dx$ (converge, valor $b/(a^2 + b^2)$)
5. Determine o valor de k, para que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{k|x|}dx = 0.5$, $(k = -4)$.

O Critério de Dirichlet é um teste para provar a convergência de séries numéricas ou integrais impróprias da forma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ ou $\int_{a}^{\infty} f(x)g(x)dx$.

Critério de Dirichlet para integrais Sejam f e g funções tais que

- f é contínua em $[a,\infty)$ e existe um $M>0$ tal que $|\int_a^x f(s)ds| \leq M$, para todo $x>a$
- $g \in C^1[a,\infty)$ com $g(x)>0$, $g'(x)\leq 0$, $\forall x>a$
- $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$.

Então, a integral imprópria converge $\int_a^\infty f(x)g(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)g(x)dx$. *Obs* A prova é baseada em integração por partes.

Responda

1. Mostre que $\int_1^\infty x^{1/5}\sin x dx$ diverge, e como consequência prove que $\int_0^\infty x^2 \sin x^{5/2} dx$ também diverge. Compare com o teste de Dirichlet.

2. Prove que $\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx$ converge condicionalmente (Use o critério de Dirichlet).

3. Mostre que a integral imprópria $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ converge condicionalmente (Critério de Dirichlet). Ainda mais, $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \pi/2$.

4. Seja $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ contínua tal que exista a integral imprópria $\int_a^\infty f(x)dx$.
   - Necessariamente $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$? Caso seja falso, mostre um contra-exemplo.
   - Se $f(x)>0$, para $x>a$. É verdade que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$? Caso seja falso, encontre um contra-exemplo.
   - Mostre que se f é não-crescente com $f(x)>0$, para $x>a$, então $\lim_{x\to} f(x)dx = 0$.

5. Prove que $\int_{-\infty}^\infty (\frac{\sin x}{x})^2 dx$