Lista 2: Geometria Analítica

A. Ramos *

24 de março de 2017

Resumo

Lista em constante atualização.

1. Produto escalar, projeção ortogonal e combinações lineares
2. Produto Vetorial, volume e produto misto

1 Produto escalar, projeção ortogonal e combinações lineares

O *produto escalar* de U e V, denotado por $U.V$ é o *número* definido como $U.V = v_1u_1 + v_2u_2 + \cdots + v_nu_n$, onde $U = (u_1, \ldots, u_n)$ e $V = (v_1, \ldots, v_n)$ em $\mathbb{R}^n$. Com o produto interno podemos calcular o comprimento dum vetor usando $\|V\|^2 = V.V$ e também o ângulo θ entre dos vetores, através da formula

$$U.V = \|U\|\|V\|\cos(\theta).$$

Usamos o produto interno para "projetar"o vetor V sobre o vetor W. A *projeção ortogonal* de V sobre W denotado por $\text{proj}_W(V)$ é o *único* vetor paralelo a W tal que $V - \text{proj}_W(V)$ é *ortogonal* a W, i.e. $\text{proj}_W(V)//W$ e $(V - \text{proj}_W(V)) \perp W$. Existe uma formula para calcular $\text{proj}_W(V)$ dada por

$$\text{proj}_W(V) = \frac{W.V}{\|W\|^2}W, \text{ se } W \neq \overrightarrow{0}.$$

Proceda a responder as seguintes questões

1. Considere os vetores U e V, com $U = \alpha V$. Então,
   - Se $V \neq \bar{0}$, temos que $|\alpha| = \|U\|/\|V\|$.
   - Calcule $\text{proj}_V U$.
2. Determine o valor de $\alpha \in \mathbb{R}$, de forma que $A = (4, \alpha, 4)$, $B = (10, \alpha, -2)$ e $C = (2, 0, -4)$ seja os vértices de um triângulo equilátero. *Rpta* $\alpha = 2, -2$.
3. Calcule $\|U - V\|$, se $\|U\| = 13$, $\|V\| = 19$ e $\|U + V\| = 24$. *Rpta* 22
4. Sabemos que se $U.V = U.W$ não necessariamente $V = W$ (Apresente algum exemplo). Mas, mostre que se $U.V = U.W$ vale *para todo vetor* U, então $V = W$.
5. Considere os vetores U e V. Se $\angle(U, V) = 60°$, $\|U\| = 5$, $\|V\| = 8$. Encontre $\|U + V\|$ e $\|U - V\|$. *Rpta* $\|U + V\| = \sqrt{129}$, $\|U - V\| = 7$.
6. Se $\angle(U, V) = 45°$ e $\|U\| = 3$. Ache a norma de V tal que $U - V$ seja perpendicular a U. *Rpta* $\|V\| = 3\sqrt{2}$.
7. * Qual a distância que percorreu uma pessoa que primeiramente percorreu 5 m na direção sudoeste, 10 m da direção norte e finalmente 8 m na direção leste 30° norte. *Dica:* Faça o esboço do percorrido, use $\cos 15° = (\sqrt{2} + \sqrt{6})/4$. *Rpta* $\sqrt{269 - 70\sqrt{2} - 20\sqrt{6}}$.

*Department of Mathematics, Federal University of Paraná, PR, Brazil. Email: `albertoramos@ufpr.br`.

8. Se os lados de um triângulo equilátero ABC têm medida 2. Calcule $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}$. *Rpta:* -6

9. Considere três pontos A, B e C, tais que $\angle(BA, BC) = 60°$, o segmento AB tem tamanho 6, e o segmento BC tem tamanho 8. Encontre o valor de $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB}$. *Dica* Faça o esboço. *Rpta* -24.

10. Encontre um vetor U com norma $\sqrt{2}$, $\angle(U, (1, -1, 0)) = 45°$ e $U \perp (1, 1, 0)$. *Rpta* $(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, 1)$ ou $(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, -1)$

11. Se U e V são vetores não nulos. Então

$$\text{proj}_V(\text{proj}_U V) = \frac{(U.V)^2}{\|U\|\|V\|}V.$$

Interprete geometricamente.

12. Seja $U = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$. Mostre que $U = \text{proj}_{\vec{i}}U + \text{proj}_{\vec{j}}U + \text{proj}_{\vec{k}}U$. Verifique também que $\text{proj}_V U = \text{proj}_{\alpha V} U$ para qualquer $\alpha \neq 0$.

13. Considere três pontos, A, B e C em $\mathbb{R}^3$ e defina os vetores $U = \overrightarrow{BA}$ e $V = \overrightarrow{BC}$. Mostre que o vetor $W = U/\|U\| + V/\|V\|$ é bissetriz do ângulo $\angle(AB, BC)$.

14. Encontre um vetor U com norma $\sqrt{5}$, ortogonal a $(2, 1, -1)$ tal que $\{U, (1, 1, 1), (0, 1, -1)\}$ seja linearmente dependente. *Rpta:* $(1, 0, 2)$ ou $(-1, 0, -2)$.

15. Considere uma circunferência $\mathcal{C}$ no plano, cujo uns dos diâmetros é o segmento AB ($A = (-3, -1)$, $B = (5, 3)$) e considere uma reta que passa por $(13, 0)$ e $(0, 13/2)$ que é tangente à circunferência $\mathcal{C}$. Encontre as coordenadas da interseção da circunferência com a reta. *Rpta* $(3, 5)$

16. Considere o triângulo com vértices $A = (1, 1, 0)$, $B = (5/3, 1/3, 2/3)$ e $C = (0, 0, 1)$ e H ponto médio do segmento AB. Ache o ponto M dentro do triângulo tal que MH é ortogonal a AB e a distância de H a M é a metade do comprimento do segmento HC. *Rpta* $M = (2/3, 1/2, 1/3)$.

Considere vetores $U_1, U_2, \ldots, U_m$ em $\mathbb{R}^n$. Dito *conjunto* de vetores é *linearmente independente* (l.i) se o único jeito de que

$$\alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2 + \alpha_3 U_3 + \cdots + \alpha_m U_m = \overrightarrow{0}$$

é que $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \ldots, \alpha_n = 0$. Caso contrário, dizemos que os vetores são *linearmente dependente* (l.d).

Assim, para determinar se certo conjunto de vetores $U_1, U_2, \ldots, U_m$ são linearmente dependente ou não, devemos montar o sistema

$$\alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2 + \alpha_3 U_3 + \cdots + \alpha_m U_m = \overrightarrow{0}$$

com incógnitas $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ e resolver dito sistema. Se a única solução é a solução nula (i.e. todos os α's iguais a zero) os vetores são l.i, caso exista solução com algum α_i diferente de zero, os vetores são necessariamente l.d.

1. Verifique se os vetores dados são l.i ou l.d.

   (a) $U = (0, 1, 0), V = (2, 0, 2)$ (b) $U = (1, 2, 3), V = (0, 4, 1), W = (2, 0, 7)$ (c) $U = (\cos\theta, \sin\theta), V = (\cos\theta, -\sin\theta)$

2. Considere vetores $U = \overrightarrow{PA}$, $V = \overrightarrow{PB}$ e $W = \overrightarrow{PC}$. Mostre que:

   - P, A, B e C estão no mesmo plano (i.e. são coplanares) se e somente se U, V e W são l.d
   - P, A e B estão na mesma reta (i.e. são colineares) se, e somente se U e V são l.d.

3. Mostre que

   - Se $\{U, V\}$ é l.d, então $\{U, V, W\}$ também é l.d
   - Se $\{U, V, W\}$ é l.i, então $\{U, V\}$ também é l.i. O que vc pode dizer acerca de $\{U, W\}$?

4. Se U é ortogonal a V (com U e V diferentes de $\overrightarrow{0}$). Então, U e V são linearmente independente. Interprete geometricamente.

   Dica Monte o sistema $\alpha U + \beta V = \overrightarrow{0}$ e faça o produto interno com U e depois com V. Note que como U é diferente de $\overrightarrow{0}$, $\|U\|^2 = U.U \neq 0$, similarmente para V.

2 Produto vetorial, volume e produto misto

No espaço $\mathbb{R}^3$, podemos definir o *produto vetorial*. O produto vetorial $V \times W$ é um *vetor* em $\mathbb{R}^3$ cujo componentes são

$$V \times W = \left(\det \begin{pmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{pmatrix}, -\det \begin{pmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{pmatrix} \right),$$

onde $V = (v_1, v_2, v_3)$ e $W = (w_1, w_2, w_3)$.

O vetor $V \times W$ tem as seguintes características:

- O comprimento (norma) de $V \times W$ é

  $$\|V \times W\| = \|V\|\|W\| \sin\theta, \text{ onde } \theta \text{ é o ângulo entre } V \text{ e } W.$$

  Note que $\|V \times W\|$ *coincide* com a área do paralelogramo determinado por V e W.

- O vetor $V \times W$ é perpendicular a V e W. Como consequência, $V \times W$ é perpendicular ao "plano"definido por V e W.

- O sentido de $V \times W$ é dada pela regra da mão direita. Assim, $V \times W = -W \times V$.

- O produto $(V \times W).U$ é chamado de *produto misto* de U, V e W. O produto misto é um número e

  $$|(V \times W).U| \text{ coincide com o volume do paralelepípedo determinado por } U, V \text{ e } W.$$

  Existe uma formula rápida para calcular $(V \times W).U$ dada pela seguinte expressão.

  $$(V \times W).U = \det \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix}.$$

- $V \times W = 0$, se e somente se V e W são paralelos

Observação Não existe produto vetorial para vetores no plano.

Com essas informações responda os seguintes exercícios.

1. Considere os vetores $U = (2, -3, 1)$, $V = (2, 2, 0)$ e $W = (1, -3, 4)$. Calcule:

   - $U \times V$ e $V \times U$
   - $(U \times V) \times W$, $U \times (V \times W)$
   - $(U \times V) \times (U \times W)$
   - $(U \times V).W$, $V.(V \times W)$
   - $(U + V) \times (U + W)$

   Dica Calcule com cuidado e pode usar propriedades geométricas.

2. Mostre que

   $$\|V \times U\|^2 = \|V\|^2 \|W\|^2 - (V.W)^2.$$

   Observação Essa formula pode ser muito útil para calcular rapidamente o norma de $V \times U$.

3. Qual é a área do triângulo com vértices $A = (1, 2, 1)$, $B = (3, 0, 4)$ e $C = (5, 1, 3)$. *Rpta* $\sqrt{101}/2$.

4. Encontre U $\in \mathbb{R}^3$ tal que $U \times (\vec{i} + \vec{k}) = 2(\vec{i} + \vec{j} - \vec{k})$ e $\|U\|^2 = 6$. *Rpta* $U = (-1, 2, 1)$.

5. Considere um vetor U ortogonal a $\vec{i} + \vec{j}$ e a $-\vec{i} + \vec{k}$, com norma $\sqrt{3}$ e cujo ângulo θ entre U e $\vec{j}$ satisfaz $\cos\theta > 0$. Com essas informações, ache U. *Dica* Escreva U como $u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$. *Rpta* $U = -\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

6. Se $V \times U = W \times U$ com $U \neq \vec{0}$. Então, $W = V$.?

7. Prove a fórmula para o produto vetorial duplo

$$U \times (V \times W) = (U.W)V - (U.V)W$$

8. Considere um plano $\mathcal{P}$ que contêm trés pontos $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, -1)$ e $C = (1, 1, -1)$. Encontre o centro de uma esfera de radio $3\sqrt{2}$ que é tangente ao plano $\mathcal{P}$ e passa por C.

   Rpta $(-1, -2, 2)$ ou $(-1, 4, -4)$.

9. Considere uma pirâmide regular com base ABCD onde $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 0, 1)$, $C = (0, \sqrt{2}, 1)$ e $D = (1, \sqrt{2}, 0)$. Encontre o vértice P da pirâmide se a pirámide tem volume igual $\sqrt{2}$.

   Dica: O volume da pirâmide é 1/3 da área da base pela altura. *Rpta* $P = (2, \sqrt{2}/2, 2)$ ou $P = (-1, \sqrt{2}/2, -1)$.

10. Resolva os seguintes sistemas:

    (a) $U \times (\vec{i} + \vec{j}) = -\vec{i} + \vec{j}$ e $U.(\vec{i} + \vec{j}) = 2$. *Rpta* $U = (1, 1, 1)$

    (b) $U \times (\vec{i} - \vec{k}) = \vec{j}$, $U + V = \vec{i} + \vec{j}$ e $\|U\| = 1$.

    Rpta $U = (0, 0, 1), V = (1, 1, -1)$ ou $U = (1, 0, 0), V = (0, 1, -1)$

    (c) $(U + \vec{i} - 2\vec{k}) \times (\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}) = -\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ e $U.(\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}) = 10$. *Rpta* $U = (3/2, 4, 1/2)$

11. Se h é a altura de um triângulo ABC relativa a AB. Mostre que $h\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|$.

12. Se $\|U\| = 3$, $\|V\| = 4$, $\angle(U, V) = 120°$. Calcule o volume do paralelepípedo determinado por os vetores $U \times V$, U e V.

13. Considere três vetores no espaço. Mostre que $U \times V$, U e V são linearmente independente, se $\|U \times V\| \neq 0$.

14. Se $U = (1, 2, -1)$, $V = (0, 3, -4)$, $W = (1, 0, \sqrt{3})$ e $Z = (0, 0, 2)$. Calcule o volume do tetraedro ABCD, se $\overrightarrow{AB} = \text{proj}_V U$, $\overrightarrow{AC}$ é o vetor oposto a W e $\overrightarrow{BD} = \text{proj}_Z(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC})$.