Lista 1: Análise II

A. Ramos *

7 de março de 2017

Resumo

Lista em constante atualização. (1) Integral inferior e superior; (2) Funções integráveis.

1 Integral inferior e superior; Funções integráveis

1. Faça os 6 primeiros problemas do capítulo IX do livro texto.

2. Encontre funções limitadas $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que

   - $\underline{\int_a^b} f(x)dx + \underline{\int_a^b} g(x)dx < \underline{\int_a^b}(f(x) + g(x))dx$
   - Se $f(x) < g(x), \quad \forall x \in [a, b]$ mas $\underline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} g(x)dx$. Mostre que, no caso em que f e g são contínuas, se $f(x) < g(x), \quad \forall x \in [a, b]$ então $\int_a^b f(x)dx < \int_a^b g(x)dx$.

3. Sejam $f_1, \dots, f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ funções integráveis e escalares não negativos $c_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m$. Considere uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que

$$\omega(f; X) \leq \sum_{i=1}^{n} c_i \omega(f_i; X), \text{ para todo } X \subset [a, b].$$

   Mostre que f é limitada e integrável em $[a, b]$. Com essa informação, prove que

   (a) $1/f$ é integrável, se f é integrável em $[a, b]$ e $f(x) \geq c > 0$, $\forall x \in [a, b]$.

   (b) $\max\{f, g\}$ e $\min\{f, g\}$ são integráveis se f, g são integráveis e limitadas. Em particular $f^+ := \max\{f, 0\}$ e $f^- := -\min\{f, 0\}$ são integráveis se f é limitada e integrável.

   (c) $\sqrt{f}$ é integrável, se f é integráve e $f \geq 0$ em $[a, b]$.

4. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitada e considere um ponto $x^* \in [a, b]$. Para cada $\delta > 0$, defina:

$$\omega(f; \delta) := \omega(f; (x^* - \delta, x^* + \delta) \cap [a, b]).$$

   - Mostre que existe $\lim_{\delta \to 0} \omega(f; \delta)$. Denote esse número por $\omega(f; x^*)$, qual é chamada *oscilação de f no ponto x^**.
   - Prove que f é contínua em x^* se, e somente se $\omega(f; x^*) = 0$.
   - Seja f uma função que tem limites laterais em x^*. Então, se $f(a) \notin (f(x^*-), f(x^*+))$, $\omega(f; x^*) = |f(x^*+) - f(x^*-)|$ (i.e. a oscilação é igual ao valor absoluto de seu salto nesse ponto)
   - Prove que f é localmente Lipchitz em x^*. Então, $\limsup_{\delta \to 0} \omega(f; \delta)/\delta < \infty$. Mostre que a reciproca é falsa. Lembre, f é localmente Lipchitz em x^*, se existe $\delta > 0$ tal que $f|_X$ é Lipschitz, onde $X := [a, b] \cap (x^* - \delta, x^* + \delta)$.

*Department of Mathematics, Federal University of Paraná, PR, Brazil. Email: albertoramos@ufpr.br.

5. (Funções convexas) Seja $f : \mathbb{R} \to \bar{\mathbb{R}}$ uma função, onde $\bar{R} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ O dominio efetivo de f é o conjunto $\mathrm{dom}(f) := \{x \in \mathbb{R} : f(x) < \infty\}$. Suponha que f é *convexa*, isto é

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f(x) + \beta f(y), \quad \forall x, y \in \mathrm{dom}(f), \text{ com } \alpha + \beta = 1, \beta, \alpha \geq 0.$$

6. Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funções limitadas, com f, g e $f \circ g$ integráveis. Dizemos que um conjunto $C \subset \mathbb{R}$ é convexo se $\alpha x + \beta y \in C$, para todo $x, y \in C$, com $\alpha + \beta = 1, \beta, \alpha \geq 0$ e que uma função f é convexa se

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f(x) + \beta f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \text{ com } \alpha + \beta = 1, \beta, \alpha \geq 0.$$

Então mostre as seguintes propriedades:

- Mostre que $\mathrm{dom}(f)$ e que o epígrafo de f, $\mathrm{epi}(f) := \{(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : t \geq f(x)\}$, são conjuntos convexos. Ainda mais, prove que f é convexa se, e somente se $\mathrm{epi}(f)$ é convexo.
- (slope inequality) Seja f uma função com $dom(f) = \mathbb{R}$.
  Então, f é convexa em $[a, b]$ se, e somente se para todos $x_0 < x < x_1$ em $[a, b]$, temos que

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}.$$

  Faça um esboço dessas desigualdades.
- Mostre que f é convexa se, e somente se $f(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i)$, para todo $x_i \in \mathrm{dom}(f)$, $\alpha_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$.
- (Testes de convexidade usando derivadas) Seja f diferenciável em $(a, b) \in \mathbb{R}$. Então, f é convexa em (a, b) se, e somente se algumas das siguentes condições valem:
  - f' é não decrescente em (a,b)
  - $f(y) \geq f(x) + f'(x)(y - x)$, $\forall x, y \in (a, b)$
  - $f''(x) \geq 0$, para todo $x \in (a, b)$. (aqui assumimos que f é duas vezes diferenciável)

  Com essas ferramentas, facilmente podemos provar que $-\log(x)$, $\exp(x)$, (a entropia) $S(x) := -x\log(x)$, se $1 \geq x \geq 0$; $S(0) = 0$, $f(x) := x^{-\alpha}$, $\alpha > 0$, $x \in (0, \infty)$ são funções convexas.
- (Desigualdade de Jensen) Suponha que $|g(x)| \leq K$, $x \in [a, b]$ e que $[-K, K] \subset \mathrm{dom}(f)$. Então, prove que

$$f\left(\frac{1}{b - a}\int_a^b g(x)dx\right) \leq \frac{1}{b - a}\int_a^b (f \circ g)(x)dx. \tag{1}$$

  Ainda mais, prove que a reciproca também vale, isto é, se (1) vale para toda função g, então f deve ser convexa.
- Suponha que f é contínua e que para toda função g, a expressão (1) vale com igualdade, então necessáriamente f deve ser linear (i.e. $f(x) = ax$, $\forall x$, para certo $a \in \mathbb{R}$.)
- Use a convexidade $x \to |x|^p$ para provar a desigualdade das médias generalizada (generalized mean inequality), isto é,

$$(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^p)^{1/p} \leq (\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^q)^{1/q}$$

  para todo $\alpha_i \geq 0$, com $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$, $x_i > 0$, $\forall i$ e $p \leq q$, com $|p| + |q| \neq 0$. Como caso particular, prove a desigualdade de Young: Para todo $x, y \geq 0$, $p, q \in (1, \infty)$, tal que $1/p + 1/q = 1$ temos que

$$xy \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q.$$

- Use a convexidade de $x \to |x|^p$ para provar:

- (Minkoswski desigualdade) Para f, g integráveis em $[a,b]$ com $p > 1$, temos que

$$\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p dx\right)^{1/p} \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g(x)|^p dx\right)^{1/p}$$

- (Holder desigualdade) Para f, g integráveis em $[a,b]$ com $q, p > 1$ e $1/p + 1/q = 1$, temos que

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{1/q}$$

- Prove que se f é integrável e convexa em $[a,b]$. Então, $f(\frac{a+b}{2}) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

7. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua cujas somas inferiores (superiores) são todas iguais. Mostre que f é constante.

8. Seja f integrável em $[a,b]$ com $|f(x)| \leq K$, $\forall x \in [a,b]$. Se $g : [-K,K] \to \mathbb{R}$ é continua. Então, $g \circ f$ é integrável em $[a,b]$.

   A hipótese da continuidade de g é fundamental. De fato, mostre que $g \circ f$ não é integrável, se $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ é definido como $g(x) = 1$, se $x \in (0,1]$ e $g(0) = 0$, onde f é a função de Thomae (i.e. $f : (0,1) \to \mathbb{R}$, com $f(x) = 0$, se x é irracional e $f(x) = 1/q$, se $x = p/q$, onde p e q são primos entre si.)

9. (Função de Cantor) Procederemos a definir a função de Cantor G.

   (a) Seja $x \in [0,1]$. Mostre que x sempre pode ser escrito como

   $$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{nx}}{3^n}, \quad a_{nx} \in 0, 1, 2.$$

   Mostre que essa representação é única para $x \notin \mathcal{C}$.
   Lembre que o conjunto de Cantor é definido como

   $$\mathcal{C} := \{x \in [0,1] : x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{nx}}{3^n}, \text{com } a_{nx} \in \{0,2\}\}.$$

   (b) Dado x e sua expansão, denote por $N_x := \inf\{n \in \mathbb{N} : a_{nx} = 1\}$, onde N_x pode ser ∞ se não existir $n \in \mathbb{N}$ tal que $a_{nx} = 1$.
   Define a função de Cantor, $G : [0,1] \to \mathbb{R}$ como

   $$G(x) := \frac{1}{2^{N_x}} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N_x - 1} \frac{a_{nx}}{2^n}, \quad \text{onde } x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{nx}}{3^n}.$$

   (c) Prove que $G(x)$ independe da expansão de x, se x tem duas representações ternarias.

   (d) Mostre que G é constante em $I^0 := [0,1] \setminus \mathcal{C}$, onde $\mathcal{C}$ é o conjunto de Cantor.

   (e) Prove que G é não decrecente e contínua.

   (f) Mostre que a função de Cantor é integrável.

   (g) Mostre que $G(\mathcal{C}) = [0,1]$

10. Prove que uma função f é integrável se, dado $\varepsilon > 0$, existe funções escadas ϕ, ψ tais que $\phi \leq f \leq \psi$ e $\psi - \phi < \varepsilon$.

11. Prove que se f é integrável em $[a,b]$, existe um ponto $c \in (a,b)$ tal que f é contínua em $x = c$.

12. Use o item anterior para provar que se f é integrável em $[a, b]$, o conjunto de ponto onde f é contínua é denso.

13. Seja f uma função contínua em $[a, b]$. Mostre que

$$\lim_{p\to\infty}\left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p} = \sup\{|f(x)| : x \in [a, b]\}. \tag{2}$$

Denote $\|f\|_p := \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$, $p \in \mathbb{R}_+$ e $\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| : x \in [a, b]\}$. Então, (2) é equivalente a dizer que para toda f contínua, $\|f\|_p \to \|f\|_\infty$ quando $p \to \infty$.

14. (Lema fundamental do cálculo de variaciones) Seja f uma função contínua em $[a, b]$ tal que $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$, para toda função contínua g com $g(a) = g(b) = 0$. Então, prove que $f(x) = 0$, $\forall x \in [a, b]$.

15. Seja $r \in (0, 1)$. Considere a função $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida como $f(0) = 0$ e $f(x) = r^{n-1}n(n + 1)$, se $x \in (1/(n + 1), 1/n]$, $n \in \mathbb{N}$. Prove que f é integrável e

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{1-r}.$$

16. Suponha que f e g são funções contínuas não negativas em $[a, b]$. Mostre que existe $c \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx.$$

Dica: Use o teorema do valor intermediário.