CM005 Algebra Linear
Lista 1

Alberto Ramos

1. Para cada um dos sistemas de equações lineares, use o método de Gauss para obter um sistema equivalente cuja matriz de coeficientes esteja na forma escada. Indique se o sistema é consistente ou não (isto é, se o sistema possue solução ou não). Se o sistema for possível e determinado (isto é, sem variáveis livres), use susbtitução para encontrar a única solução. Se o sistema for possível e indeterminado (isto é, com variáveis livres) coloque-o em forma escada reduzida por linhas e encontre o conjunto solução.

(a) $\begin{array}{rcrcl} x_1 & - & 2x_2 & = & 3 \\ 4x_1 & + & x_2 & = & 8 \end{array}$ (b) $\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & x_2 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & = & 0 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & = & 0 \end{array}$

(c) $\begin{array}{rcrcrl} 3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = 4 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = 1 \\ 11x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = 14 \end{array}$ (d) $\begin{array}{rcrcrl} x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = 4 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = 1 \\ 7x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & = 7 \end{array}$

(e) $\begin{array}{rcrcrcrl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = 0 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = 2 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = 4 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = 5 \end{array}$ (f) $\begin{array}{rcrcrl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = 0 \\ x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = 0 \end{array}$

(g) $\begin{array}{rcrcrcrl} x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = 3 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = 8 \\ 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = -1 \end{array}$

(h) $\begin{array}{rcrcrl} 5x_1 & - & 8x_2 & + & 2x_3 & = 5 \\ x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = 2 \\ x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 & = 1 \end{array}$

2. Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{aligned} ax_1 + x_2 &= b \\ cx_1 + x_2 &= d \end{aligned}$$

- Prove que o sistema tem uma única solução se e somente se $a \neq c$;
- Se $a = c$. Mostre que o sistema tem solução, se e somente se $b = d$.

3. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta \in \mathbb{R}$, considere o sistema de equações cuja matriz aumentada é

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & \alpha & \beta & | & 1 \\ 1 & 0 & \alpha & 0 & | & 1 \\ 1 & 1 & \alpha & \beta & | & 1 \\ 1 & 1 & \alpha & 0 & | & 1. \end{pmatrix}$$

Para quais valores de α e β

(a) o sistema não tem solução;

(b) o sistema tem uma única solução;

(c) o sistema tem infinitas soluções.

4. Utilize a eliminação de Gauss-Jordan para calcular a inversa de A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Sejam as matrizes $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Escrevendo a matriz B em termos das suas colunas, $B = [B_1 \ \ B_2]$, em que $B_1 = (2 \ \ 2 \ \ 0)^T$ e $B_2 = (-1 \ \ 0 \ \ 3)^T$. Verifique que o produto AB pode ser escrito como $AB = A[B_1 \ \ B_2] = [AB_1 \ \ AB_2]$.

Generalize para matrizes arbitrárias, isto é, se $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $B \in M_{n\times p}(\mathbb{K})$, com $B = [B_1 \ \ \ldots \ \ B_p]$ onde B_i é a i-ésima coluna de B. Então, $AB = A[B_1 \ldots B_p] = [AB_1 \ldots AB_p]$.

6. Sejam A uma matriz invertível $n \times n$ e B uma matriz $n \times p$. Mostre que a forma escada reduzida por linhas de $(A|B)$ é $(I|C)$ onde $C = A^{-1}B$.

7. Considere as matrizes $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$

Encontre matrizes $X \in M_2(\mathbb{R})$ tal que

- $AX + B = C$
- $XA + B = C$
- $AX + B = X$
- $XA + C = X$

8. Prove que se B é equivalente por linhas a A se e somente se existe uma matriz invertível M tal que $B = MA$.

9. Determine os coeficientes a, b, c e d da função polinomial $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, cujo gráfico passa pelos pontos $q_1 = (0, 10)$, $q_2 = (1, 7)$, $q_3 = (3, -11)$ e $q_4 = (4, -14)$. *Dica:* Escreva um sistema linear associado.

10. Verifique (multiplicando corretamente) que a inversa da matriz M está dada por

    (a) $M^{-1} = I + uv^T/(1 - v^T u)$ se $M = I - uv^T$ e $v^T u \neq 1$

    (b) $M^{-1} = I + U(I - VU)^{-1}V$ se $M = I - UV$ e $(I - VU)$ é invertível.

    (c) $M^{-1} = A^{-1} + A^{-1}U(W - VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}$
    se $M = A - UW^{-1}V$ e $W - VA^{-1}U$ é invertível.

11. Considere as matrizes 3×4

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Verifique que os sistemas homogêneos associados às matrizes A_1, A_2, A_3 e A_4 admite uma solução não trivial. Isto é, verifique para cada matriz A_j, $j = 1, \dots, 4$, que existe um $\bar{x} \in \mathbb{R}^4$ diferente do vetor zero, tal que $A_j\bar{x} = \bar{0} \in \mathbb{R}^3$.

Agora, seja $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ tal que $n > m$ (número de incógnitas é maior que o número de equações). Mostre que o sistema linear homogêneo $A\bar{x} = \bar{0}$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, tem solução diferente da solução trivial (isto é, $\bar{x} \neq \bar{0}$).
Dica: Use a forma escada reduzida por linhas.

12. Se A e B são matrizes quadradas. Mostre que $I - AB$ é invertível se $I - BA$ for invertível. *Dica:* Use $B(I - AB) = (I - BA)B$.

13. Quais dos seguintes subconjuntos são sub-espaços vetoriais de $\mathbb{R}^2$? Esboçe.

    (a) $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0, y \leq 0\}$

    (b) $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \leq 0\}$

    (c) $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x^2\}$

    (d) $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x, x \leq y\}$

    (e) $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y^3\}$

14. Dado dois subespações vetoriais W_1 e W_2 de V. A interseção $W_1 \cap W_2$ é um subespaço vetorial? e a união $W_1 \cup W_2$?

15. Considere os subespaços vetoriais

$$W_1 = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{rl} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = & 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 8x_4 = & 0 \end{array} \right\}$$

e

$$W_2 = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{rl} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = & 0 \\ 2x_2 + 4x_4 = & 0 \end{array} \right\}.$$

Calcule o subespaço vetorial $W_1 \cap W_2$.

16. Dado uma matriz $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$. A trasposta de A, denotada $A^T \in M_{n\times m}(\mathbb{K})$, é a matriz definida por $(A^T)_{ij} = a_{ji}$ para $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.
Mostre:
    - $(A + B)^T = A^T + B^T$;
    - $(AB^T)^T = BA^T$;
    - Suponha adicionalmente que $n = m$, então $(AB)^T = B^T A^T$.

17. Usando as seguintes propriedades do determinante $det(A)$: (i) $det(AB) = det(A)det(B)$, (ii) $det(\alpha A) = \alpha^n det(A)$ e (iii) $det(I) = 1$ para todo $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. Calcule $det(adj(A))$ e $det(A^{-1})$.
Dica: Use $adj(A)A = det(A)I$.

18. Calcule o determinante das matrizes
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2-\alpha & 4 \\ 3 & 3-\alpha \end{pmatrix}$$
Para a matriz C, encontre todos os valores de α para os quais o determinante é igual a zero.

19. Para as seguintes matrizes determine se o vetor $\bar{b}$ está em $col(A)$ (espaço-coluna de A), se $\bar{w}$ está em $lin(A)$ (espaço-linha de A) e se $v \in Nuc(A)$, onde $Nuc(A)$ é o núcleo da matriz A.
    - $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\bar{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\bar{w} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\bar{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$
    - $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix}$ $\bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\bar{w} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ $\bar{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

20. Determine se os seguintes vetores são linearmente independente em $\mathbb{R}^3$ e esboçe o correspondente espaço gerado.
    - $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$
    - $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$
    - $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 24 \end{pmatrix}$

21. Determine se as seguintes matrizes são linearmente independente em $M_2(\mathbb{R})$

- $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

22. Determine se as seguintes funções são linearmente independente em $C[0,1]$ (conjunto de todas as funções reais contínuas definidas em $[0,1]$)

- $cos(\pi x)$, $sen(\pi x)$
- e^x, e^{-x}, e^{2x}
- $cos(x)$, 1, $sen^2(x/2)$

23. Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$ uma matriz. Mostre que se $\{v_1, \ldots, v_p\} \in \mathbb{R}^n$ é linearmente dependente, então $\{Av_1, \ldots, Av_p\}$ é também linearmente dependente.

Agora suponha que A é invertível. Então, se $\{v_1, \ldots, v_p\} \in \mathbb{R}^n$ é linearmente independente, então $\{Av_1, \ldots, Av_p\}$ é linearmente independente.

24. Dados W_1 e W_2 dois subespaços vetoriais de V. *Defina*:

$$W_1 + W_2 := \{v \in V : v = w_1 + w_2, \text{ onde } w_1 \in W_1 \text{ e } w_2 \in W_2\}.$$

Mostre que W_1+W_2 é um subespaço vetorial de V. W_1+W_2 é chamado de *soma dos espaços vetoriais* W_1 e W_2. Se adicionalmente, $W_1 \cap W_2 = \{\bar{0}\}$, $W_1 + W_2$ é denotado por $W_1 \oplus W_2$. $W_1 \oplus W_2$ é chamado de *soma direta* de W_1 e W_2.

Dados os vetores $w_1 = (2 \;\; 1 \;\; 3)^T$, $w_2 = (3 \;\; -1 \;\; 4)^T$ e $w_3 = (1 \;\; 3 \;\; 2)^T$ em $V = \mathbb{R}^3$.

(a) Calcule os seguintes subespaços: Span(w_1, w_2, w_3), Span(w_1, w_2)+Span(w_3), Span(w_1, w_2)+Span(w_3, w_2).

(b) Descreva geometricamente cada ums dos subespaços mencionados.

(c) Quais das somas descritas são somas diretas?

25. Considere os subconjuntos W_1 e W_2 de $M_n(\mathbb{K})$,

$$W_1 := \{A \in M_n(\mathbb{K}) : A = A^T\}$$

e

$$W_2 := \{A \in M_n(\mathbb{K}) : A = -A^T\}.$$

W_1 é o subconjunto de todas as matrizes simétricas ($A = A^T$) e W_2 é o subconjunto das matrizes antisimétricas ($A = -A^T$).

Mostre que $M_n(\mathbb{K}) = W_1 \oplus W_2$, isto é, (i) $M_n(\mathbb{K}) = W_1 + W_2$ e (ii) $W_1 \cap W_2 = \{\bar{0}\}$, onde $\bar{0}$ representa a matrix zero em $M_n(\mathbb{K})$.

Dica: Dado $A \in M_n(\mathbb{K})$, considere $B := (A + A^T)/2$.

26. Um espaço vetorial V possui dimensão k, $dim(V) = k$, se existem k vetores, $\{v_1, \ldots, v_k\}$ em V, tais que:

    I *Os vetores $v_1, \ldots, v_k$ são linearmente independente*, isto é, sempre que $\alpha_1 v_1 + \ldots, \alpha_k v_k = \bar{0}$, com $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}$, necessariamente temos que todos os $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ devem ser iguais ao zero.

    II *Span*$(v_1, \ldots, v_k) = V$, ou seja, todo vetor v em V se escreve como combinação linear dos vetores $v_1, \ldots, v_k$.

    Um conjunto $\{v_1, \ldots, v_k\}$ satisfazendo as propriedades acimas mencionadas é chamada de *base*. Temos as seguintes propriedades:

    (a) Todo espaço vetorial possui uma base.

    (b) Se $\{w_1, \ldots, w_p\}$ é uma base de V, com $dim(V) = k$. Então, $p = k$.

    (c) O espaço n-dimensional $\mathbb{R}^n$ tem dimensão n, $dim(\mathbb{R}^n) = n$. O espaço das matrizes $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ tem dimensão $m \times n$.

    (d) Se W é um subespaço vetorial de V. Então, $dim(W) \leq dim(V)$. Ainda mais, se $dim(W) = dim(V)$, então $W = V$.

    (e) Se W_1 e W_2 são dois subespações vetoriais de V. Então temos que, $dim(W_1 + W_2) + dim(W_1 \cap W_2) = dim(W_1) + dim(W_2)$.

    Usando essas informações responda, prove ou calcule:

    - Se S_1, S_2 são subespaços tridimensional de $\mathbb{R}^5$, então devem possuir um vetor não nulo em comum. *Dica:* O que acontece se $S_1 \cap S_2 = \{0\}$?
    - Se $w_1 = (4 \;\; 2 \;\; 6)^T$, $w_2 = (3 \;\; -1 \;\; 4)^T$ e $w_3 = (1 \;\; 3 \;\; 2)^T$. Calcule a dimensão de Span(w_1, w_2, w_3).
    - Se $\{v_1, \ldots, v_k\}$ é uma base de V, se e somente se, todo vetor $v \in V$ é escrito de maneira única como combinação linear de $\{v_1, \ldots, v_k\}$.
    - Dê exemplo de três vetores v_1, v_2 e v_3 sendo $\{v_1\}$ l.i., $\{v_2, v_3\}$ l.i., v_2 e v_3 não são múltiplos de v_1 e $\{v_1, v_2, v_3\}$ l.d.
    - Dados $v_1 = (-3 \;\; 5 \;\; 2 \;\; 1)^T$ e $v_2 = (1 \;\; -2 \;\; -1 \;\; 2)^T$. (i) Por que v_1 e v_2 não pode gerar $\mathbb{R}^4$? (ii) Encontre vetores v_3 e v_4 que complete junto com v_1 e v_2 uma base de $\mathbb{R}^4$.

27. Encontre bases para $lin(A)$ (espaço-linha de A), $col(A)$ (espaço-coluna) e para $Nuc(A)$ (núcleo de A).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

28. Para quais números c e d as seguintes matrizes têm posto 2? Lembre que o posto de uma matriz A, $posto(A)$, é a dimensão do espaço-linha, $posto(A) = dim(lin(A))$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & c & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & d & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix}$$

29. Ache todos os valores possíveis para $posto(A)$ em função dos valores de α.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ -2 & 4\alpha & 2 \\ \alpha & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 6 & 6 & -4 \\ -2 & -1 & \alpha \\ \alpha & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

30. Seja $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Prove que todo vetor em $Nuc(A)$ é ortogonal a todo vetor em $lin(A)$.

31. Para toda matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, temos

    (a) $posto(A) = dim(col(A)) = dim(lin(A))$. Essa propriedade é geralmente abreviado como *posto linha = posto coluna*.

    (b) Sempre, $n = dim(Nuc(A)) + dim(col(A))$. Perceba que n é o número de coluna de A.

    Então, com essas informações responda:

    - Se $m = n$. Prove que A é invertível se e somente se $posto(A) = n$.
    - Qual é o $posto(A)$ e a $dim(Nuc(A))$, em função da variável α

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \alpha & 3 & -1 \\ 3 & 6 & -2 \\ -1 & -3 & -\alpha \end{pmatrix}$$

32. Sejam A e $B \in M_n(\mathbb{K})$. Mostre que $AB = O$, se e somente se o espaço-coluna de B é um subespaço de $Nuc(A)$.

33. Seja $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $B \in M_{n\times p}(\mathbb{K})$. Considere $C = AB \in M_{m\times p}(\mathbb{K})$. Mostre que:

    (a) O espaço coluna de C está contido no espaço coluna de A.

    (b) O espaço linha de C está contido no espaço linha de B

    (c) $posto(C) \leq \min(posto(A), posto(B))$

    (d) Se as coluna de A e B são l.i, então as colunas de C também são l.i.

    (e) Se as linhas de A e B são l.i, então as linhas de C também são linearmente independente

    (f) Se as colunas de B são linearmente dependente, então as colunas de C também são linearmente dependente

(g) Se as linhas de A são linearmente dependente, então as linhas de C também são linearmente dependente

(h) O núcleo de B está contido no núcleo de C

34. Seja $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. A matriz A tem posto 1, se e somente se $A = uv^T$ para algum $u \in \mathbb{R}^m$, $v \in \mathbb{R}^n$. *Dica*: Toda linha é multiplo de alguma linha não nula.

    Se $A = uv^T$, prove que u é uma base para o espaço-coluna de A e v^T é uma base para o espaço-linha de A. Qual a dimensão de $Nuc(A)$?